Stoll, F.X. (1879): Die Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie, In: Programm des Grossherzoglichen Gymnasiums zu Bensheim für das Schuljahr 1878 - 1879, Darmstadt, 1879.

Die Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie,

zurückgeführt auf ein einziges System von drei simultanen Gleichungen.

Von Gymnasiallehrer Dr. **F. X. Stoll.**

---

§. 1. Einleitung und Begrenzung der Aufgabe.

Die Veranlassung zu der folgenden Arbeit gab das Programm des Herrn Diekmann „Ueber die Zurückführung der Hauptaufgaben der Trigonometrie auf ein System von drei linearen, simultanen Gleichungen", Essen 1877, in dem derselbe in dankenswerther Weise aus den Formeln, welche die Projectionen zweier Seiten eines ebenen Dreiecks auf die dritte bestimmen, alle Sätze der ebenen Trigonometrie entwickelt und ihren inneren organischen Zusammenhang nachgewiesen hat. Weil die Formeln, von denen er ausging, linearer Natur waren, so konnte er sich dabei des Hülfsmittels der Determinanten bedienen und für alle Hauptaufgaben der ebenen Trigonometrie ebenso einfache als elegante Lösungen geben. Nicht mit demselben Erfolge hat er es versucht, die Formeln der sphärischen Trigonometrie auf algebraische Elimination zurückzuführen, einestheils, weil die von ihm (Seite 24) aufgestellten Fundamentalgleichungen schon die Kenntniss einer Hauptgleichnng der sphärischen Trigonometrie ($\cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos \alpha$) vorausssetzen, während sie unmittelbar aus den gegebenen Stücken oder aus Gleichungen, welche den Projectionsformeln der ebenen Trigonometrie entsprechen, hergeleitet werden müssten, anderntheils, weil sie selbst schon so complicirter Art sind, dass man nur durch weitläufige Transformationen die übrigen Sätze der sphärischen Trigonometrie aus ihnen gewinnen kann. Dies hat auch Herr Diekmann selbst eingesehen, und nachdem er ein Beispiel für die Anwendung seiner Formeln gegeben, die Sache abgebrochen. Indem ich nun da anfange zu bauen, wo Herr Diekmann aufgehört hat, kann ich allerdings nicht versprechen, in ebenso einfacher und übersichtlicher Weise, wie dies von jenem für die ebene Trigonometrie geschehen ist, meine Aufgabe zu lösen. Dies liegt jedoch zum Theil in der Natur derselben, indem die Seiten eines sphärischen Dreiecks nicht wie dort unmittelbar in Rechnung gebracht werden können, sondern statt derselben ihre goniometrischen Functionen, deren Zusammenhang unter sich wesentlich durch quadratische Gleichungen gegeben ist, so dass die Aufstellung eines linearen Systems von Fundamentalgleichungen immer nur für eine bestimmte Art derselben, nämlich entweder für die Sinusse oder die Cosinusse oder die Tangenten der Seiten oder für eine aus denselben gebildete Function derselben Art möglich ist; sobald aber neben den Sinussen auch die Cosinusse oder Tangenten der Seiten in den Formeln vorkommen, complicirt sich die Rechnung ungemein, weil man dann wenigstens quadratische Gleichungen, sehr oft aber auch Gleichungen höherer Grade zu lösen hat.

Zunächst kommt es also darauf an, ein System von Formeln zu entwickeln, in welchen dieselben Functionen der Seiten oder Functionen dieser Functionen, wo möglich im ersten Grade vorkommen. Schon die Rücksicht auf den pädagogischen Grundsatz, dass man vom Einfachen und Besonderen zum Zusammengesetzten und Allgemeinen aufsteigen müsse, nicht aber umgekehrt, wird es zweckmässig erscheinen lassen, zuerst den Sinus, Cosinus und die Tangente eines Winkels im rechtwinkeligen sphärischen Dreieck durch Functionen der Seiten darzustellen, wie man ja auch in der ebenen Trigonometrie zuerst an dem rechtwinkeligen Dreiecke die Begriffe dieser Functionen festzustellen pflegt, ehe man zur Berechnung des schiefwinkeligen Dreiecks übergeht. Dazu kommt noch die Ueberlegung, dass eine Projection zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks auf die dritte nur dann möglich ist, wenn man wie bei dem ebenen Dreieck dasselbe durch eine von der Spitze gefällte Höhe in zwei rechtwinkelige zerlegt und jedes Segment der Grundlinie als Function der Seiten und Winkel ausdrückt. Eine solche Projection ist aber unbedingt nöthig, wenn man zu Formeln gelangen will, welche den von Diekmann für die ebene Trigonometrie zu Grunde gelegten analog sind.

§. 2. Das rechtwinkelige Dreieck.

Um uns auf alle Fälle zu rüsten, wollen wir zuerst in Betracht ziehen, welche rechtwinkelige Dreiecke auf der Oberfläche einer Kugel durch drei grösste Kreise entstehen können, von denen zwei aufeinander senkrecht stehen. Durch drei grösste Kreise zerfällt die Oberfläche einer Kugel überhaupt in acht Dreiecke, von denen je zwei gegenüber liegende Scheiteldreiecke, also symmetrisch gleich sind und je zwei anliegende sich zu einem Kugelzweieck ergänzen. Die Dreiecke eines Paares der ersten Art sind nicht wesentlich verschieden, da sie dieselben Stücke, nur in umgekehrter Reihenfolge, enthalten. Die Dreiecke eines Paares der zweiten Art aber unterscheiden sich nicht bloss der Ordnung nach, in der die Stücke aufeinanderfolgen, sondern auch durch die Grösse dieser Stücke selber. Hat ein Dreieck der zweiten Art die Stücke a, b, c, α, β, γ, wo α ein Rechter ist, so gibt es noch drei davon verschiedene rechtwinkelige Dreiecke, welche von Bogen derselben grössten Kreise eingeschlossen werden, und zwar hat dann das erste die Stücke: $a_1 = 180^0 - a$, $b_1 = 180^0 - b$, $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha = 1R$, $\beta_1 = 180^0 - \beta$, $\gamma_1 = \gamma$; das zweite hat die Stücke: $a_2 = 180^0 - a$, $b_2 = b$, $c_2 = 180^0 - c$, $\alpha_2 = \alpha = 1R$, $\beta_2 = \beta$, $\gamma_2 = 180^0 - \gamma$; das dritte endlich: $a_3 = a$, $b_3 = 180^0 - b$, $c_3 = 180^0 - c$, $\alpha_3 = \alpha = 1R$, $\beta_3 = 180^0 - \beta$, $\gamma_3 = 180^0 - \gamma$.

Aus dieser Uebersicht folgt, dass unter den vier rechtwinkeligen, wesentlich verschiedenen Dreiecken, welche durch drei grösste Kreise gebildet werden können, eines existiren muss, in welchem die beiden Katheten sowohl als auch die beiden gegenüber liegenden Winkel zugleich kleiner sind als 90^0, während von den übrigen das eine Katheten und Winkel besitzt, welche zugleich grösser sind als 90^0 aber kleiner als 180^0, und die beiden anderen eine Kathete, die zugleich mit dem gegenüber liegenden Winkel kleiner als 90^0, und eine Kathete, die zugleich mit dem gegenüber liegenden Winkel grösser ist als 90^0 aber kleiner als 180^0.

Wir wollen unsere Untersuchung beginnen mit einem Dreieck, in welchem die Katheten und die gegenüber liegenden Winkel kleiner sind als 90^0; in einem solchen ist nothwendigerweise auch die Hypotenuse kleiner als 90^0. Denken wir uns demgemäss eine rechtwinkelige dreiseitige Ecke, deren Seiten und Winkel diese Eigenschaft haben; in der nebenstehenden Figur, welche eine solche Ecke zeigt, sei o der Scheitel und die Seite $\varepsilon o \delta$ stehe senkrecht auf der Seite $\delta o \beta$. Man lege durch β eine auf $o\beta$ senkrechte Ebene, welche die zwei übrigen Kanten der Ecke in δ und ε schneidet; diese Ebene ist die Neigungsebene der Seiten $\varepsilon o \beta$ und $\beta o \delta$ und steht auf ihnen senkrecht. Zwei Ebenen $\varepsilon \beta \delta$ und $\varepsilon o \delta$, welche auf einer dritten $o \delta \beta$ senkrecht stehen, schneiden sich aber in einer Geraden $\varepsilon \delta$, welche auf $o \delta \beta$ senkrecht steht; daher sind die Dreiecke $\varepsilon o \delta$ und $\delta o \beta$ rechtwinkelig. Man hat nun:

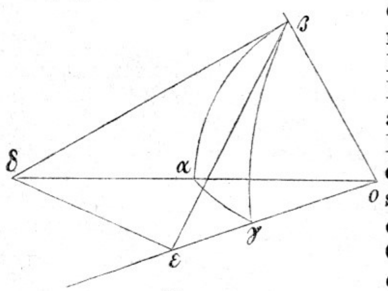

Fig. 1.

$$\sin \varepsilon\beta\delta = \frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon\beta}, \quad \cos \varepsilon\beta\delta = \frac{\beta\delta}{\varepsilon\beta}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon\beta\delta = \frac{\varepsilon\delta}{\beta\delta},$$

$$\sin \varepsilon o\delta = \frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon o}, \quad \operatorname{tg} \delta o\beta = \frac{\beta\delta}{o\beta}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon o\delta = \frac{\varepsilon\delta}{o\delta},$$

$$\sin \varepsilon o\beta = \frac{\varepsilon\beta}{\varepsilon o}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon o\beta = \frac{\varepsilon\beta}{o\beta}, \quad \sin \delta o\beta = \frac{\beta\delta}{o\delta}.$$

Dividirt man die zwei letzten in je einer Columne stehenden Gleichungen durch einander und vergleicht die Quotienten mit der ersten, so erhält man die drei neuen Gleichungen:

$$\sin \varepsilon\beta\delta = \frac{\sin \varepsilon o\delta}{\sin \varepsilon o\beta}, \quad \cos \varepsilon\beta\delta = \frac{\operatorname{tg} \delta o\beta}{\operatorname{tg} \varepsilon o\beta}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon\beta\delta = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon o\delta}{\sin \delta o\beta}.$$

Aus einer mit dem Radius $o\beta$ um o beschriebenen Kugel wird durch die Ecke das sphärische Dreieck $\alpha\beta\gamma$ herausgeschnitten, und mit den üblichen Bezeichnungen heissen dann die letzten Gleichungen:

$$1)\ \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad 2)\ \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}, \quad 3)\ \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c},$$

wozu durch Vertauschung der Buchstaben noch folgende hinzutreten:

$$1^a)\ \sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a}, \quad 2^a)\ \cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}, \quad 3^a)\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

Diese Gleichungen gelten vorläufig nur unter den oben gemachten Beschränkungen, also für ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Seiten und übrige Winkel $< 90^0$ sind. Setzt man aber die oben angegebenen Werthe von $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; a_2, b_2, c_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; a_3, b_3, c_3, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bezüglich statt $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ in sie ein, so bleiben sie unverändert, ein Beweis, dass sie auch für die übrigen drei rechtwinkeligen Dreiecke, welche durch Bogen derselben grössten Kreise gebildet werden, folglich für alle rechtwinkelige Dreiecke Gültigkeit haben.

Aus obigen sechs Gleichungen kann man durch rein analytische Operationen noch vier andere herausbringen. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen 2 und 3 und vergleicht das Product mit 1, so kommt:

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a \cdot \sin c} = \frac{\sin b \cdot \sin c \cdot \cos a}{\sin a \cdot \sin c \cdot \cos b \cdot \cos c}, \text{ woraus}$$

$$4)\quad \cos a = \cos b \cdot \cos c$$

folgt. Die Gleichungen 1^a, 2^a, 3^a ähnlich behandelt geben dasselbe Resultat. Multiplicirt man ferner die Gleichungen 3 und 3^a mit einander, so ist:

$$\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{1}{\cos b \cdot \cos c} \quad \text{oder mit Berücksichtigung von 4:}$$

$$5)\quad \cos a = \operatorname{cotg}\beta \cdot \operatorname{cotg}\gamma.$$

Dividirt man endlich 2 durch 1^a, so hat man

$$\frac{\cos\beta}{\sin\gamma} = \frac{\operatorname{tg} c \cdot \sin a}{\operatorname{tg} a \cdot \sin c} = \frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos b \cdot \cos c}{\cos c} = \cos b \quad \text{oder}$$

$$6)\quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma};$$

die Division von 2^a) durch 1) gibt das analoge Resultat

$$6^a)\quad \cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta},$$

wozu man auch durch Vertauschung der Buchstaben hätte gelangen können.

§. 3. Die Fundamentalformeln für das schiefwinkelige Dreieck.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten zehn Gleichungen sind nothwendig und hinreichend, um alle Aufgaben, welche sich auf das rechtwinkelige Dreieck beziehen, zu lösen. Ohne uns dabei weiter aufzuhalten, schreiten wir sofort zur Entwickelung der Formeln für ein schiefwinkeliges Dreieck. Sobald wir uns dabei auf Dreiecke beschränken, deren Seiten und Winkel kleiner sind als 180^0 d. h. auf convexe dreiseitige Ecken, erkennen wir, dass jedes schiefwinkelige Dreieck dieser Art durch eine von der Spitze gefällte Höhe als die Summe oder Differenz zweier rechtwinkeliger Dreiecke im allgemeinsten Sinne, wie wir sie oben betrachtet haben, angesehen werden kann, je nachdem der Fusspunkt der Höhe auf der Grundlinie oder ihrer Verlängerung liegt. Nehmen wir zunächst den ersten Fall (Fig. 2), so ist

$$\operatorname{tg}\beta\delta = \cos\beta \cdot \operatorname{tg} c,$$

$$\text{und } \operatorname{tg}\delta\gamma = \cos\gamma \cdot \operatorname{tg} b.$$

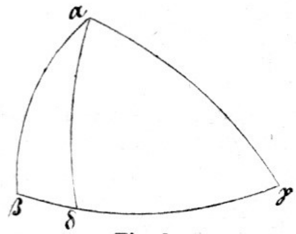

Fig. 2.

Im zweiten Fall (Fig. 3) hat man

$$\operatorname{tg}\beta\delta = \cos(180^0 - \beta)\operatorname{tg} c,$$

$$\operatorname{tg}\delta\gamma = \cos\gamma \cdot \operatorname{tg} b.$$

Im ersten Falle folgt nun hieraus:

$$\operatorname{tg}(\beta\delta + \delta\gamma) = \operatorname{tg} a = \frac{\cos\beta \cdot \operatorname{tg} c + \cos\gamma \cdot \operatorname{tg} b}{1 - \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c};$$

im zweiten Falle erhält man für

$$\operatorname{tg}(\gamma\delta - \beta\delta) = \operatorname{tg} a$$

dasselbe Resultat, so dass also für alle Fälle

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\beta \cdot \operatorname{tg} c + \cos\gamma \cdot \operatorname{tg} b}{1 - \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c}$$

ist. Durch Wegschaffung des Nenners auf der rechten Seite, andere Anordnung der entstehenden Posten und nachfolgende Vertauschung der Buchstaben entwickelt sich daraus folgendes System von drei Fundamentalgleichungen:

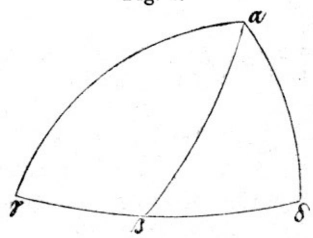

Fig. 3.

$$1)\quad \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma + \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\gamma \,.\, \cos\beta,$$
$$2)\quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \,.\, \cos\alpha + \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\gamma,$$
$$3)\quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta + \operatorname{tg} b \,.\, \cos\alpha + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\alpha.$$

Diese Gleichuugen sind neu und haben den Vortheil, dass in ihnen nur dieselbe Function der Seiten und nur dieselbe Function der Winkel vorkommt, nämlich die Tangenten der Seiten und die Cosinusse der Winkel. Sie entsprechen ferner genau den Gleichungen, wodurch für das ebene Dreieck die Projectionen zweier Seiten auf die dritte ausgedrückt werden. In der That, lässt man den Radius der Kugel, auf der sich das sphärische Dreieck befindet, fortwährend wachsen, ohne die Winkel und die absolute Länge der Seiten zu ändern, so kann man an der Grenze statt der Tangenten der Seiten die zugehörigen Bogen nehmen und das Produkt abc als von der dritten Ordnnng gegen a, b, c vernachlässigen. Dadurch geht aber Gleichung 1) über in:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta.$$

Aus diesem Grunde sind diese Gleichungen vorzüglich geeignet zur unmittelbaren Lösung aller Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie.

§. 4. Erste und zweite Hauptaufgabe.

Wir behandeln zuerst die Aufgabe, die Seiten zu finden, wenn alle drei Winkel gegeben sind, und im Anschluss daran die umgekehrte, die Winkel zu finden, wenn alle drei Seiten gegeben sind. Um nun aber die Fundamentalformeln des vorigen Paragraphen für diesen Zweck zur Rechnung mit Determinanten bequem zu machen, bedarf es einer Transformation derselben, die man erreicht, wenn man jede durch das Produkt $\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c$ dividirt und statt der Tangenten Cotangenten setzt. Dadurch gehen sie nämlich, wenn man noch die Abkürzungen

$$\operatorname{cotg} b \,.\, \operatorname{cotg} c = x,\quad \operatorname{cotg} c \,.\, \operatorname{cotg} a = y,\quad \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{cotg} b = z,$$
$$\cos\alpha = a,\qquad \cos\beta = b,\qquad \cos\gamma = c$$

einführt, über in:

$$1)\quad x - cy - bz = cb,$$
$$2)\quad -cx + y - az = ac,$$
$$3)\quad -bx - ay + z = ba.$$

Daraus erhält man sofort, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ -c & 1 & -a \\ -b & -a & 1 \end{vmatrix}$$

mit R bezeichnet wird:

$$Rx = \begin{vmatrix} cb & -c & -b \\ ac & 1 & -a \\ ba & -a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -c & -b \\ 0 & 1 & -a \\ ba+c & -a & 1 \end{vmatrix} = (b+ca)(c+ab).$$

Ganz in der nämlichen Weise findet man Ry und Rz, so dass für

$$a + bc = A,\qquad b + ca = B,\qquad c + ab = C,$$
$$Rx = BC,\qquad Ry = CA,\qquad Rz = AB$$

wird. Indem man das Produkt von je zwei dieser Gleichungen durch die noch übrige dividirt und statt x, y, z ihre Werthe wieder einsetzt, ergibt sich:

$$4)\quad R \,.\, \operatorname{cotg}^2 a = A^2,\qquad R \,.\, \operatorname{cotg}^2 b = B^2,\qquad R \,.\, \operatorname{cotg}^2 c = C^2.$$

Aus diesen Gleichungen geht zunächst hervor, dass R eine positive Grösse ist, die man deshalb gleich δ^2 setzen kann; die Entwickelung der gleich geltenden Determinante gibt:

$$\delta^2 = 1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2,$$

oder auch, wenn man in derselben die erste Verticalreihe nach einander mit c und b multiplicirt und bezüglich zur zweiten und dritten Vertikalreihe addirt:

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1-c^2 & -(a+bc) \\ -b & -(a+bc) & 1-b^2 \end{vmatrix} = \sin^2\beta \,.\, \sin^2\gamma - (\cos\alpha + \cos\beta \,.\, \cos\gamma)^2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung zerlegt sich in das Produkt:

$$-(\cos\beta\,.\,\cos\gamma+\sin\beta\,.\,\sin\gamma+\cos\alpha)\,[\cos\alpha+(\cos\beta\,.\,\cos\gamma-\sin\beta\,.\,\sin\gamma)],$$
$$=-[\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha]\,.\,[\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma)],$$
$$=-4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma).$$

Mit den bekannten Bezeichnungen wird also

$$5)\quad \delta^2=-4\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)\,.\,\cos(\sigma-\beta)\,.\,\cos(\sigma-\gamma).$$

Ferner folgt aus den Gleichungen 4):

$$\sin^2 a=\frac{\delta^2}{\delta^2+A^2},\quad \sin^2 b=\frac{\delta^2}{\delta^2+B^2},\quad \sin^2 c=\frac{\delta^2}{\delta^2+C^2},$$
$$\cos^2 a=\frac{A^2}{\delta^2+A^2},\quad \cos^2 b=\frac{B^2}{\delta^2+B^2},\quad \cos^2 c=\frac{C^2}{\delta^2+C^2}.$$

Nun ist aber $\delta^2+A^2=1-2abc-a^2-b^2-c^2+a^2+2abc+b^2c^2=(1-b^2).(1-c^2)=\sin^2\beta\,.\,\sin^2\gamma$ u. s. w. Daher geht die erste Reihe von Gleichungen über in:

$$\sin^2 a\,.\,\sin^2\beta\,.\,\sin^2\gamma=\sin^2 b\,.\,\sin^2\gamma\,.\,\sin^2\alpha=\sin^2 c\,.\,\sin^2\alpha\,.\,\sin^2\beta=\delta^2,$$

oder, weil die Seiten und Winkel immer kleiner als 180^0 vorausgesetzt werden, die Sinusse also immer positiv sind:

$$6)\quad \sin a\,.\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma=\sin b\,.\,\sin\gamma\,.\,\sin\alpha=\sin c\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin\beta=+\delta.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst die andere:

$$7)\quad \frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}=\frac{\delta}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma},$$

d. h. in Worten ausgedrückt: die Sinusse der Seiten verhalten sich wie die Sinusse der Winkel; die Grösse $\frac{\delta}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma}$ ist positiv und führt den Namen Modulus des Dreiecks; sie wird kurzweg mit μ bezeichnet. Dadurch, dass man je zwei der letzten Gleichungen multiplicirt, erhält man noch ein neues Gleichungssystem:

$$8)\quad \sin\alpha\,.\,\sin b\,.\,\sin c=\sin\beta\,.\,\sin c\,.\,\sin a=\sin\gamma\,.\,\sin a\,.\,\sin b=d,$$

wo man unter d die Grösse $\mu^2.\sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma$ zu verstehen hat. Zwischen δ, μ und d besteht die Relation:

$$9)\quad \delta\mu=d.$$

Ausserdem folgt aus der Division der Gleichungen 8) mit $\sin a\,.\,\sin b\,.\,\sin c$ unter Berücksichtigung von 7) dass auch noch

$$9^a)\quad \frac{1}{\mu}=\frac{d}{\sin a\,.\,\sin b\,.\,\sin c}.$$

Andererseits ergibt die zweite Reihe der obigen Gleichungen:

$$\cos^2 a=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta\,.\,\cos\gamma)^2}{\sin^2\beta\,.\,\sin^2\gamma},\quad \cos^2 b=\frac{(\cos\beta+\cos\gamma\,.\,\cos\alpha)^2}{\sin^2\gamma\,.\,\sin^2\alpha},\quad \cos^2 c=\frac{(\cos\gamma+\cos\alpha\,.\,\cos\beta)^2}{\sin^2\alpha\,.\,\sin^2\beta},$$

und, wenn man die Quadratwurzel zieht:

$$10)\quad \cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta\,.\,\cos\gamma}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma},\quad \cos b=\frac{\cos\beta+\cos\gamma\,.\,\cos\alpha}{\sin\gamma\,.\,\sin\alpha},\quad \cos c=\frac{\cos\gamma+\cos\alpha\,.\,\cos\beta}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}.$$

Hier ist überall auf der rechten Seite das positive Zeichen genommen worden; denn für den speciellen Fall, wo $\alpha=90^0$, $\cos\alpha$ also $=0$ ist, erhält man aus unseren Gleichungen:

$$\cos a=\pm\operatorname{cotg}\beta\,.\,\operatorname{cotg}\gamma,\quad \cos b=\pm\frac{\cos\beta}{\sin\gamma},\quad \cos c=\pm\frac{\cos\gamma}{\sin\beta},$$

wo aber die Vergleichung mit den Formeln 5, 6 und 6^a des §. 2 zeigt, dass nur das positive Zeichen gelten kann.

Aus den Gleichungen 4) folgt endlich mit Berücksichtigung unserer Resultate in Bezug auf die Zeichen:

$$11)\quad \delta\,.\,\operatorname{cotg} a=A,\quad \delta\,.\,\operatorname{cotg} b=B,\quad \delta\,.\,\operatorname{cotg} c=C.$$

Die Formeln 10) und 11) lösen unsere erste Hauptaufgabe vollständig, haben aber den Nachtheil, dass man die logarithmische Rechnung nicht auf sie anwenden kann. Diesem Uebelstand kann man auf zweierlei Weise abhelfen, einmal dadurch, dass man die goniometrischen Functionen der halben Seiten in Function der Winkel ausdrückt, was wir weiter unten im Zusammenhange darlegen wollen, dann aber auch durch Einführung von Hülfswinkeln, indem man

$$\cos\beta\,.\,\cos\gamma=\cos A,\quad \cos\gamma\,.\,\cos\alpha=\cos B,\quad \cos\alpha\,.\,\cos\beta=\cos C$$

setzt, wodurch die Gleichungen 10) übergehen in:

$$\cos a = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+A).\cos\frac{1}{2}(\alpha-A)}{\sin\beta.\sin\gamma},\quad \cos b = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\beta+B).\cos\frac{1}{2}(\beta-B)}{\sin\gamma.\sin\alpha},\quad \cos c = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\gamma+C).\cos\frac{1}{2}(\gamma-C)}{\sin\alpha.\sin\beta}.$$

Wir können jetzt an die Lösung der zweiten Hauptaufgabe gehen, die Winkel aus den Seiten zu finden. Zu diesem Zwecke addirt man zu der den Werth Rx ausdrückenden Determinante, welche wir gleich BC gefunden haben, die mit $\cos\alpha$ multiplicirte Determinante R, welche gleich δ^2 ist, so kommt:

$$BC + \delta^2\cos\alpha = \begin{vmatrix} A & -c & -b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & -a & 1 \end{vmatrix} = A(1-a^2) = A\sin^2\alpha;$$

folglich ist, wenn man für BC seinen Werth $\delta^2.\operatorname{cotg} b.\operatorname{cotg} c$ und für A seinen Werth $\delta.\operatorname{cotg} a$ substituirt und zuletzt mit δ dividirt:

$$\delta(\operatorname{cotg} b.\operatorname{cotg} c + \cos\alpha) = \operatorname{cotg} a.\sin^2\alpha,$$

und, wenn man die Cotangenten in Quotienten der Cosinusse und Sinusse auflöst,

$$\delta.(\cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha) = \frac{\cos a.\sin b.\sin c.\sin^2\alpha}{\sin a} = \frac{d}{\mu}\cdot\cos a = \delta.\cos a.$$

Man erhält daher nach der Division mit δ und wenn man dann die Buchstaben vertauscht, das System:

$$12)\quad \begin{cases} \cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha, \\ \cos b = \cos c.\cos a + \sin c.\sin a.\cos\beta, \\ \cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos\gamma, \end{cases}$$

aus welchem die Cosinusse der Winkel α, β, γ gefunden werden können. Zur Erleichterung der logarithmischen Rechnung setze man hier

$$\cos b.\cos c = \cos A',\quad \cos c.\cos a = \cos B',\quad \cos a.\cos b = \cos C',$$

wodurch

$$\cos\alpha = -\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+A').\sin\frac{1}{2}(a-A')}{\sin b.\sin c},\quad \cos\beta = -\frac{2\sin\frac{1}{2}(b+B').\sin\frac{1}{2}(b-B')}{\sin c.\sin a},\quad \cos\gamma = -\frac{2\sin\frac{1}{2}(c+C').\sin\frac{1}{2}(c-C')}{\sin a.\sin b}$$

gefunden wird.

Die drei Formen der Grösse d, welche durch die Gleichungen 8) definirt sind, stehen zu den drei Formen, welche δ vermöge der Gleichungen 6) besitzt, in einem ähnlichem Verhältniss, wie die Gleichungen 12) zu den Gleichungen 10); es ist deshalb zu erwarten, einmal, dass d in Bezug auf die Gleichungen 12) die nämliche Rolle spielen werde, wie δ in Bezug auf die Gleichungen 10), dann aber auch, dass der Ausdruck von d in Function der Seiten allein in ähnlicher Weise gebildet sein werde, wie δ als Function der Winkel erscheint. Wir wollen deshalb den Werth von d^2 durch die Seiten des Dreiecks darstellen, was uns zu weiteren wichtigen Folgerungen führen wird. Wir wissen, dass

$$d^2 = \mu^2.d^2 = \frac{\delta^4}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta.\sin^2\gamma};$$

ferner ist die adjungirte Determinante der Determinante R, die wir R' nennen wollen, gleich dem Quadrate von R, also gleich δ^4, folglich ist:

$$d^2 = \frac{R'}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta.\sin^2\gamma}.$$

Nun ist aber

$$R' = \begin{vmatrix} 1-a^2 & c+ab & b+ca \\ c+ab & 1-b^2 & a+bc \\ b+ca & a+bc & 1-c^2 \end{vmatrix},$$

folglich, wenn man berücksichtigt, dass $1-a^2$, $1-b^2$, $1-c^2$ bezüglich gleich $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ ist,

$$d^2 = \frac{R'}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta.\sin^2\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{c+ab}{\sin\alpha.\sin\beta} & \dfrac{b+ca}{\sin\gamma.\sin\alpha} \\ \dfrac{c+ab}{\sin\alpha.\sin\beta} & 1 & \dfrac{a+bc}{\sin\beta.\sin\gamma} \\ \dfrac{b+ca}{\sin\gamma.\sin\alpha} & \dfrac{a+bc}{\sin\beta.\sin\gamma} & 1 \end{vmatrix},$$

oder mit Zuziehung des Systemes 10) und, wenn man die Abkürzungen

$$\cos a = a',\quad \cos b = b',\quad \cos c = c'$$

einführt:

$$13)\quad d^2 = \begin{vmatrix} 1 & c' & b' \\ c' & 1 & a' \\ b' & a' & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Entwickelung der Determinante gibt entweder unmittelbar

$$d^2 = 1 + 2a'b'c' - a'^2 - b'^2 - c'^2,$$

oder, wenn man ähnlich verfährt, wie oben bei δ^2,

$$d^2 = \sin^2 b \,.\, \sin^2 c - (\cos a - \cos b \,.\, \cos c)^2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung zerlegt sich wieder in das Produkt:

$$\begin{aligned} & [\cos a - (\cos b \,.\, \cos c - \sin b \,.\, \sin c)] \,.\, [\cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c - \cos a] \\ = & [\cos a - \cos(b+c)] \,.\, [\cos(b-c) - \cos a] \\ = & 4 \sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(-a+b+c) \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(a-b+c) \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(a+b-c), \end{aligned}$$

so dass man mit den bekannten Bezeichnungen erhält:

$$14)\quad d^2 = 4 \sin s \,.\, \sin(s-a) \,.\, \sin(s-b) \,.\, \sin(s-c).$$

Die Analogie der Gleichungen 12) mit 10) und von d mit δ tritt noch deutlicher hervor, wenn man die Gleichungen 12) der Reihe nach mit $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ multiplicirt und die Gleichungen 8) dabei in Betracht zieht; denn man erhält dann die Gleichungen:

$$15)\quad d \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = a' - b'c', \quad d \,.\, \operatorname{cotg}\beta = b' - c'a', \quad d \,.\, \operatorname{cotg}\gamma = c' - a'b',$$

welche sich von den Gleichungen 11) nur dadurch unterscheiden, dass statt a, b, c bezüglich $-a'$, $-b'$, $-c'$, statt $\operatorname{cotg} a$, $\operatorname{cotg} b$, $\operatorname{cotg} c$ bezüglich $-\operatorname{cotg}\alpha$, $-\operatorname{cotg}\beta$, $-\operatorname{cotg}\gamma$, und statt δ endlich d vorkommt, mit einem Wort, dass statt der Seiten und Winkel des Dreiecks bezüglich die Supplemente der Winkel und Seiten gesetzt sind, was man durch Anwendung des Polardreiecks unmittelbar hätte herleiten können. Ohne uns aber dieses geometrischen Hülfsmittels, welches dem Eliminationsproblem fremd ist, zu bedienen, können wir aus der Congruenz der beiden letzten Gleichungssysteme vermuthen, dass dem Gleichungssysteme 1, 2, 3 ein anderes entsprechen müsse, in welchem die Seiten und Winkel bezüglich durch die Supplemente der Winkel und Seiten ersetzt sind. Und diese Vermuthung lässt sich auch analytisch bestätigen. Denn aus 13) folgt unmittelbar:

$$b'c'd^2 = \begin{vmatrix} 1 & c' & b' \\ b'c' & b' & a'b' \\ b'c' & c'a' & c' \end{vmatrix},$$

und nach einer leichten Transformation:

$$b'c'd^2 = \begin{vmatrix} 1 & c' & b' \\ b'c' - a' & b' - c'a' & 0 \\ b'c' - a' & 0 & c' - a'b' \end{vmatrix};$$

die Benutzung der Gleichungen 15) verwandelt diese Gleichung, nachdem man mit d^2 auf beiden Seiten wegdividirt hat, in:

$$b'c' = \begin{vmatrix} 1 & c' & b' \\ -\operatorname{cotg}\alpha & \operatorname{cotg}\beta & 0 \\ -\operatorname{cotg}\alpha & 0 & \operatorname{cotg}\gamma \end{vmatrix},$$

oder entwickelt:

$$b'c' = \operatorname{cotg}\beta \,.\, \operatorname{cotg}\gamma + c' \,.\, \operatorname{cotg}\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\alpha + b' \,.\, \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta.$$

Man hat daher wirklich das neue Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 16)\quad & \operatorname{cotg}\beta \,.\, \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \cos c + \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta \,.\, \cos b = \cos c \,.\, \cos b, \\ 17)\quad & \operatorname{cotg}\beta \,.\, \operatorname{cotg}\gamma \,.\, \cos c + \operatorname{cotg}\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta \,.\, \cos a = \cos a \,.\, \cos c, \\ 18)\quad & \operatorname{cotg}\beta \,.\, \operatorname{cotg}\gamma \,.\, \cos b + \operatorname{cotg}\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \cos a + \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta = \cos b \,.\, \cos a; \end{aligned}$$

dasselbe hätte man auch unmittelbar aus den Figuren 2 und 3 herleiten können, wie wir dies für das System 1, 2, 3 in §. 3 gethan haben. Dann hätten wir, in derselben Weise entwickelnd, daraus dieselben Resultate erhalten, wie aus 1, 2, 3, nur in umgekehrter Ordnung, d. h. die Gleichungssysteme 16, 17, 18 und 1, 2, 3 sind als Fundamentalformeln zur Lösung der Hauptaufgaben gleich brauchbar oder äquivalent, und wir können bei Behandlung der übrigen Hauptaufgaben nach Belieben das eine oder das andere System zu Grunde legen, ohne dadurch zu wesentlich verschiedenen Resultaten zu gelangen, ja die letzteren werden sogar der Form nach übereinstimmen, sobald wir immer je zwei Hauptaufgaben so combiniren, dass in der einen das gegeben ist, was in der anderen gesucht wird und dann die eine Aufgabe vermittelst des ersten, die andere vermittelst des zweiten Systemes lösen. Ebendarum wird es im Folgenden genügen, die Lösungen aller noch übrigen Hauptaufgaben aus dem einzigen Systeme 1, 2, 3 oder dem damit identischen des §. 3 herzuleiten, weil jede Lösung einer Hauptaufgabe auf diesem Wege der Form nach übereinstimmt mit der Lösung der conjugirten Hauptaufgabe nach dem System 16, 17, 18.

Bevor wir jedoch auf diesem Wege weiterschreiten, wollen wir erst unsere Fundamentalgleichungen benutzen, um daraus eine Reihe bekannter Formeln zu entwickeln, welche sogenannte separirte Lösungen liefern, d. h. Formeln, welche, wie Herr Diekmann a. a. O. Seite 16 gezeigt hat, ausser der gestellten Aufgabe eine ganze Gruppe von Aufgaben lösen, von denen jene ein specieller Fall ist. Dahin gehören die sogenannten Gaussischen Gleichungen, die Neper'schen Analogien und die Formeln, welche die goniometrischen Functionen der halben Winkel und Seiten bezüglich durch die Seiten und Winkel ausdrücken.

§. 5. Die Gaussischen Gleichungen, die Neper'schen Analogien und die Functionen der halben Winkel und Seiten.

Die Gleichung 1) des vorigen Paragraphen lässt sich in folgenden zwei Formen schreiben:

$$\operatorname{cotg} b \,.\, (\operatorname{cotg} c - \operatorname{cotg} a \,.\, \cos\beta) = (\operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{cotg} c + \cos\beta) \,.\, \cos\gamma,$$
$$\operatorname{cotg} c \,.\, (\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a \,.\, \cos\gamma) = (\operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{cotg} b + \cos\gamma) \,.\, \cos\beta,$$

oder nach Auflösung der Cotangenten in Quotienten von Cosinussen und Sinussen:

$$\frac{\sin a \,.\, \cos c - \cos a \,.\, \sin c \,.\, \cos\beta}{\sin b \,.\, \cos\gamma} = \frac{\cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos\beta}{\cos b},$$
$$\frac{\sin a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \sin b \,.\, \cos\gamma}{\sin c \,.\, \cos\beta} = \frac{\cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos\gamma}{\cos c};$$

die rechten Seiten dieser Gleichungen sind nach System 12) des vorigen Paragraphen der Einheit gleich, also sind es auch die linken, und man erhält, indem man ebenso mit Gleichung 2 und 3 des vorigen Paragraphen verfährt, oder durch einfache Vertauschung der Buchstaben folgende 6 Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \sin a \,.\, \cos c - \cos a \,.\, \sin c \,.\, \cos\beta = \sin b \,.\, \cos\gamma, \\ \sin a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \sin b \,.\, \cos\gamma = \sin c \,.\, \cos\beta; \\ \sin b \,.\, \cos a - \cos b \,.\, \sin a \,.\, \cos\gamma = \sin c \,.\, \cos\alpha, \\ \sin b \,.\, \cos c - \cos b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha = \sin a \,.\, \cos\gamma; \\ \sin c \,.\, \cos b - \cos c \,.\, \sin b \,.\, \cos\alpha = \sin a \,.\, \cos\beta, \\ \sin c \,.\, \cos a - \cos c \,.\, \sin a \,.\, \cos\beta = \sin b \,.\, \cos\alpha. \end{cases}$$

Ganz in derselben Weise findet man aus den Gleichungen 16, 17 und 18:

$$2)\quad \begin{cases} \sin\alpha \,.\, \cos\gamma + \cos\alpha \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos b = \sin\beta \,.\, \cos c, \\ \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \cos c = \sin\gamma \,.\, \cos b; \\ \sin\beta \,.\, \cos\alpha + \cos\beta \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos c = \sin\gamma \,.\, \cos a, \\ \sin\beta \,.\, \cos\gamma + \cos\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a = \sin\alpha \,.\, \cos c; \\ \sin\gamma \,.\, \cos\beta + \cos\gamma \,.\, \sin\beta \,.\, \cos a = \sin\alpha \,.\, \cos b, \\ \sin\gamma \,.\, \cos\alpha + \cos\gamma \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos b = \sin\beta \,.\, \cos a. \end{cases}$$

Diese bekannten Formeln, welche Beziehungen zwischen je 5 Stücken eines Dreiecks enthalten, sind an und für sich vieler Anwendungen fähig, und genügen vollständig, um ohne Zuziehung anderer Sätze unser vorgestecktes Ziel zu erreichen. Man addire und subtrahire zunächst die zweite und dritte und dann die erste und vierte Gleichung des Systemes 1), dann gibt es:

$$3)\quad 2\sin(a+b) \,.\, \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma = \sin c \,.\, (\cos\beta + \cos\alpha),$$
$$4)\quad 2\sin(a-b) \,.\, \cos^2\tfrac{1}{2}\gamma = \sin c \,.\, (\cos\beta - \cos\alpha),$$
$$5)\quad (\sin a + \sin b) \,.\, (\cos c - \cos\gamma) = \sin c \,.\, (\cos a \,.\, \cos\beta + \cos b \,.\, \cos\alpha),$$
$$6)\quad (\sin a - \sin b) \,.\, (\cos c + \cos\gamma) = \sin c \,.\, (\cos a \,.\, \cos\beta - \cos b \,.\, \cos\alpha).$$

Ebenso erhält man aus dem Systeme 2):

$$7)\quad 2\sin(\alpha+\beta) \,.\, \cos^2\tfrac{1}{2}c = \sin\gamma \,.\, (\cos b + \cos a),$$
$$8)\quad 2\sin(\alpha-\beta) \,.\, \sin^2\tfrac{1}{2}c = \sin\gamma \,.\, (\cos b - \cos a),$$
$$9)\quad (\sin\alpha + \sin\beta) \,.\, (\cos c - \cos\gamma) = \sin\gamma \,.\, (\cos a \,.\, \cos\beta + \cos b \,.\, \cos\alpha),$$
$$10)\quad (\sin\alpha - \sin\beta) \,.\, (\cos c + \cos\gamma) = \sin\gamma \,.\, (\cos a \,.\, \cos\beta - \cos b \,.\, \cos\alpha).$$

Die Division von 5) durch 9) und von 6) durch 10) liefert die neuen Formeln:

$$11)\quad (\sin a + \sin b) \,.\, \sin \gamma = (\sin \alpha + \sin \beta) \,.\, \sin c,$$
$$12)\quad (\sin a - \sin b) \,.\, \sin \gamma = (\sin \alpha - \sin \beta) \,.\, \sin c,$$

die man gewöhnlich aus dem Sinussatz ableitet.

Indem man die Summen und Differenzen der Sinusse und Cosinusse in Produkte verwandelt und auch sonst überall die halben Winkel und Seiten statt der ganzen einführt, erhalten die Gleichungen 3), 4), 7), 8), 11) und 12) folgende Gestalt:

$$\sin \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos \tfrac{1}{2} c,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos \tfrac{1}{2} c,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos \tfrac{1}{2} c,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos \tfrac{1}{2} c.$$

Um die Uebersicht zu erleichtern, bediene man sich der Abkürzungen:

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin \tfrac{1}{2} c} = l, \qquad \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos \tfrac{1}{2}\gamma} = \lambda,$$
$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2} c} = m, \qquad \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \tfrac{1}{2}\gamma} = \mu,$$
$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos \tfrac{1}{2} c} = n, \qquad \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \tfrac{1}{2}\gamma} = \nu,$$
$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos \tfrac{1}{2} c} = r, \qquad \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \tfrac{1}{2}\gamma} = \varrho;$$

dann heissen die letzten Gleichungen:

$$l n = \nu \varrho, \quad m r = \lambda \mu, \quad n r = \lambda \nu, \quad l m = \mu \varrho, \quad l r = \lambda \varrho, \quad m n = \mu \nu.$$

Die erste und dritte ist, wie man sogleich sieht, eine Folge der vier übrigen, oder auch die zweite und vierte eine Folge der vier übrigen. Man braucht also nur die erste, dritte, fünfte und sechste oder die zweite, vierte, fünfte und sechste in Betracht zu ziehen. Multiplicirt man die zweite und vierte, so gibt es $m^2 l r = \mu^2 \lambda \varrho$, was vermöge der fünften in $m^2 = \mu^2$ übergeht. Daraus folgt entweder $m = +\mu$ oder $m = -\mu$; gilt das erste Zeichen, so ist auch $l = \varrho$, $n = \nu$, $r = \lambda$, ist aber $m = -\mu$, so ist auch $l = -\varrho$, $n = -\nu$, $r = -\lambda$. Nun muss aber $m = +\mu$ sein; denn in der Gleichung

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2} c} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \tfrac{1}{2}\gamma}$$

sind die Grössen $\tfrac{1}{2}(a-b)$, $\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$, $\tfrac{1}{2} c$, $\tfrac{1}{2}\gamma$ alle $< 90^\circ$, weil Seiten und Winkel des Dreiecks alle $< 180^\circ$ vorausgesetzt wurden, ihre Sinusse und Cosinusse also positiv. Man hat daher die folgenden vier von Gauss gefundenen Gleichungen:

$$13)\quad \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin \tfrac{1}{2} c} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \tfrac{1}{2}\gamma}, \qquad 14)\quad \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2} c} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \tfrac{1}{2}\gamma},$$
$$15)\quad \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos \tfrac{1}{2} c} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \tfrac{1}{2}\gamma}, \qquad 16)\quad \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos \tfrac{1}{2} c} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos \tfrac{1}{2}\gamma}.$$

Wenn man je zwei dieser Gleichungen durch einander dividirt, so kommen die unter dem Namen der Neper'schen Analogien bekannten Gleichungen zum Vorschein, nämlich:

$$17)\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a+b)}, \qquad 18)\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a+b)},$$
$$19)\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \qquad 20)\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

Diese Gleichungen finden zur separirten Lösung der folgenden Hauptaufgaben und vieler anderen eine ausgedehnte Anwendung. Aber auch schon für die erste und zweite Hauptaufgabe kann man eine solche Lösung finden, wenn man statt der Cosinusse der Winkel und Seiten die Cosinusse und Sinusse der halben Winkel und Seiten sucht. Führen wir zu dem Behufe in die erste und zweite Gleichung des Systemes 1) die Cosinusse der halben Winkel ein, so erhält man:

$$2\sin b\,.\cos a\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sin c\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\beta = \sin(a+b) + \sin c,$$
$$2\sin c\,.\cos a\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin b\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma = \sin(a+c) + \sin b;$$

die Addition gibt nach leichter Transformation:

$$(1+\cos a)\,.(\sin c\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + \sin b\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma) = \sin s\,[\cos(s-b) + \cos(s-c)]$$

oder

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a\,.(\sin c\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + \sin b\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma) = \sin s\,.\cos\tfrac{1}{2}a\,.\cos\tfrac{1}{2}(b-c).$$

Dividirt man jetzt mit $\cos\frac{1}{2}a$ und multiplicirt mit $2\sin\frac{1}{2}a$, so kommt:

$$\sin a\,.(\sin c\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + \sin b\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma) = 2\sin\tfrac{1}{2}a\,.\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\,.\sin s.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber identisch mit $[\sin(s-b) + \sin(s-c)]\,.\sin s$, so dass durch Vertauschung der Buchstaben folgendes System von Gleichungen entsteht:

$$21)\quad \begin{cases} \sin a\,.(\sin c\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + \sin b\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma) = [\sin(s-b) + \sin(s-c)]\,.\sin s, \\ \sin b\,.(\sin a\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma + \sin c\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha) = [\sin(s-c) + \sin(s-a)]\,.\sin s, \\ \sin c\,.(\sin b\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + \sin a\,.\cos^2\tfrac{1}{2}\beta) = [\sin(s-a) + \sin(s-b)]\,.\sin s. \end{cases}$$

Wenn man von der halben Summe dieser Gleichungen jede einzelne abzieht, so erhält man ohne alles Weitere:

$$22)\quad \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin s\,.\sin(s-a)}{\sin b\,.\sin c} \quad \text{u. s. w.}$$

Für die Sinusquadrate der halben Winkel geben dieselben Gleichungen des Systemes 1):

$$2\sin b\,.\cos a\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sin c\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\beta = \sin c - \sin(a-b),$$
$$2\sin c\,.\cos a\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin b\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma = \sin b - \sin(a-c),$$

woraus durch Addition folgt:

$$(1+\cos a)\,.(\sin c\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\beta + \sin b\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma) = \sin(s-a)\,.[\cos(s-b) + \cos(s-c)]$$

oder

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a\,.(\sin c\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\beta + \sin b\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma) = \sin(s-a)\,.\cos\tfrac{1}{2}a\,.\cos\tfrac{1}{2}(b-c).$$

Dividirt man wieder mit $\cos\frac{1}{2}a$ und multiplicirt mit $2\sin\frac{1}{2}a$, so erhält man wie oben:

$$\sin a\,.(\sin c\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\beta + \sin b\,.\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma) = 2\sin\tfrac{1}{2}a\,.\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\,.\sin(s-a),$$
$$= [\sin(s-b) + \sin(s-c)]\,.\sin(s-a).$$

Es ist daher, wenn man wie oben verfährt:

$$23)\quad \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(s-b)\,.\sin(s-c)}{\sin b\,.\sin c} \quad \text{u. s. w.}$$

Das vierfache Produkt der beiden Gleichungen 22) und 23) gibt mit Berücksichtigung der Gleichung 14) des §. 4:

$$\sin^2\alpha = \frac{d^2}{\sin^2 b\,.\sin^2 c},$$

oder nach der Wurzelausziehung:

$$\sin\alpha\,.\sin b\,.\sin c = \sin\beta\,.\sin c\,.\sin a = \sin\gamma\,.\sin a\,.\sin b = d,$$

was wir schon früher wussten (vergl. Gl. 8. des §. 4.).

Dagegen erhalten wir durch Division der beiden Gleiehungen 22) und 23) die neue Gleichung:

$$24)\quad \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(s-b)\,.\sin(s-c)}{\sin s\,.\sin(s-a)},$$

woraus

$$d\,.\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = 2\sin(s-b)\,.\sin(s-c)$$

folgt. Wenn man die durch Vertauschung der Buchstaben aus dieser Gleichung entstandenen Gleichungen mit ihr multiplicirt, so bekommt man das Resultat:

$$d^3.\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\beta\,.\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = 8\sin^2(s-a)\,.\sin^2(s-b)\,.\sin^2(s-c) = \frac{d^4}{2\sin^2 s}, \quad \text{so dass}$$

$$2\sin^2 s = d\,.\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\beta\,.\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma$$

wird. Nun ist aber nach Gleichung 9) des §. 4 $d = \delta\,.\,\mu$, wo $\mu = \dfrac{\delta}{\sin\alpha\,.\sin\beta\,.\sin\gamma}$ gesetzt war; man hat daher:

$$2\sin^2 s = \frac{\delta^2.\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\beta\,.\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma}{8\,.\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,.\sin\tfrac{1}{2}\beta\,.\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,.\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,.\cos\tfrac{1}{2}\beta\,.\cos\tfrac{1}{2}\gamma} \quad \text{oder}$$

$$25)\quad \sin s = \frac{\delta}{4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,.\sin\tfrac{1}{2}\beta\,.\sin\tfrac{1}{2}\gamma},$$

wo bei der Wurzelausziehung das positive Zeichen genommen wurde, weil alle Grössen auf der rechten Seite gemäss unseren Voraussetzungen positiv sind und auch $\sin s$ positiv sein muss, da $a+b+c<4R$, also $s<2R$ ist.

Hätte man obige drei Gleichungen nicht alle mit einander multiplicirt, sondern nur je zwei, so hätte man z. B. erhalten:

$$d^2 . \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta . \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = 4\sin^2(s-a) . \sin(s-b) . \sin(s-c) = d^2 . \frac{\sin(s-a)}{\sin s}.$$

Man sieht sofort, dass $\sin(s-a) = \sin s . \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta . \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$, also

$$26) \begin{cases} \sin(s-a) = \dfrac{\delta}{4\sin\frac{1}{2}\alpha . \cos\frac{1}{2}\beta . \cos\frac{1}{2}\gamma}, \\ \sin(s-b) = \dfrac{\delta}{4\sin\frac{1}{2}\beta . \cos\frac{1}{2}\gamma . \cos\frac{1}{2}\alpha}, \\ \sin(s-c) = \dfrac{\delta}{4\sin\frac{1}{2}\gamma . \cos\frac{1}{2}\alpha . \cos\frac{1}{2}\beta} \end{cases} \text{ ist.}$$

Das System 2) gibt, in derselben Weise behandelt, nacheinander die Systeme:

$$27) \begin{cases} \sin\alpha . (\sin\gamma . \sin^2\frac{1}{2}b + \sin\beta . \sin^2\frac{1}{2}c) = -\left[\cos(\sigma-\beta) + \cos(\sigma-\gamma)\right] . \cos\sigma, \\ \sin\beta . (\sin\alpha . \sin^2\frac{1}{2}c + \sin\gamma . \sin^2\frac{1}{2}a) = -\left[\cos(\sigma-\gamma) + \cos(\sigma-\alpha)\right] . \cos\sigma, \\ \sin\gamma . (\sin\beta . \sin^2\frac{1}{2}a + \sin\alpha . \sin^2\frac{1}{2}b) = -\left[\cos(\sigma-\alpha) + \cos(\sigma-\beta)\right] . \cos\sigma; \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} \sin\alpha . (\sin\gamma . \cos^2\frac{1}{2}b + \sin\beta . \cos^2\frac{1}{2}c) = \left[\cos(\sigma-\beta) + \cos(\sigma-\gamma)\right] . \cos(\sigma-\alpha), \\ \sin\beta . (\sin\alpha . \cos^2\frac{1}{2}c + \sin\gamma . \cos^2\frac{1}{2}a) = \left[\cos(\sigma-\gamma) + \cos(\sigma-\alpha)\right] . \cos(\sigma-\beta), \\ \sin\gamma . (\sin\beta . \cos^2\frac{1}{2}a + \sin\alpha . \cos^2\frac{1}{2}b) = \left[\cos(\sigma-\alpha) + \cos(\sigma-\beta)\right] . \cos(\sigma-\gamma); \end{cases}$$

aus denselben folgt gerade wie oben:

$$29) \quad \sin^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos\sigma . \cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta . \sin\gamma} \quad \text{u. s. w.}$$

$$30) \quad \cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos(\sigma-\beta) . \cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta . \sin\gamma} \quad \text{u. s. w.}$$

und durch Division:

$$31) \quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos\sigma . \cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta) . \cos(\sigma-\gamma)}$$

$$\text{oder} \quad \delta . \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a = 2\cos(\sigma-\beta) . \cos(\sigma-\gamma).$$

Indem man die Buchstaben vertauscht und die drei so entstandenen Gleichungen multiplicirt, kommt:

$$\delta^3 . \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a . \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b . \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c = 8\cos^2(\sigma-\alpha) . \cos^2(\sigma-\beta) . \cos^2(\sigma-\gamma) = \frac{\delta^4}{2\cos^2\sigma}.$$

Daraus folgt endlich: $\quad 2\cos^2\sigma = \delta . \operatorname{tg}\frac{1}{2}a . \operatorname{tg}\frac{1}{2}b . \operatorname{tg}\frac{1}{2}c.$

Nun ist $\delta = \dfrac{d}{\mu}$ und $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{d}{\sin a . \sin b . \sin c}$, also ist:

$$32) \quad \cos\sigma = -\frac{d}{4\cos\frac{1}{2}a . \cos\frac{1}{2}b . \cos\frac{1}{2}c};$$

bei der Wurzelausziehung wurde hier das negative Zeichen genommen, weil zwar alle Grössen auf der rechten Seite ihrer Natur nach positiv sind, dagegen σ zwischen $1R$ und $3R$ liegt, also $\cos\sigma$ immer negativ wird.

Hätte man nur je 2 der obigen Gleichungen mit einander multiplicirt, so wäre entstanden:

$$\delta^2 . \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b . \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c = 4\cos^2(\sigma-\alpha) . \cos(\sigma-\beta) . \cos(\sigma-\gamma) = -\delta^2 . \frac{\cos(\sigma-\alpha)}{\cos\sigma}.$$

Daraus schliesst man, dass $\cos(\sigma-\alpha) = -\cos\sigma . \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b . \operatorname{cotg}\frac{1}{2}c$ ist, dass also:

$$33) \begin{cases} \cos(\sigma-\alpha) = \dfrac{d}{4\cos\frac{1}{2}a . \sin\frac{1}{2}b . \sin\frac{1}{2}c}, \\ \cos(\sigma-\beta) = \dfrac{d}{4\cos\frac{1}{2}b . \sin\frac{1}{2}c . \sin\frac{1}{2}a}, \\ \cos(\sigma-\gamma) = \dfrac{d}{4\cos\frac{1}{2}c . \sin\frac{1}{2}a . \sin\frac{1}{2}b}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 25 und 26, 32 und 33 haben den Uebelstand, dass die Grössen s, $s-a$, $s-b$, $s-c$, σ, $\sigma-\alpha$, $\sigma-\beta$, $\sigma-\gamma$ nicht unzweideutig durch sie bestimmt werden, denn jede Grösse der ersten Gruppe liegt zwischen 0 und $2R$, jede Grösse der zweiten Gruppe zwischen $1R$ und $3R$, so dass im ersten Falle zu den Sinussen, im zweiten Falle zu den Cosinussen je 2 Winkel gehören können, die sich zu 180°, bezüglich 360° ergänzen. Man kann aber Formeln finden, welche frei von diesem

Vorwurfe sind, wenn man bei jeder der Gaussischen Gleichungen in der Form, wie sie oben (Gl. 13, 14, 15, 16) gegeben worden sind, nach einander auf jeder Seite die Einheit addirt und subtrahirt; es entspringen dann folgende 8 Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}s\,.\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\right].\cos\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\beta)\right]}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}s\,.\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\right].\sin\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\beta)\right]}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(s-a).\sin\frac{1}{2}(s-b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\right].\cos\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\beta)\right]}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a).\cos\frac{1}{2}(s-b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\right].\sin\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\beta)\right]}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}s\,.\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\left[45^0-\frac{1}{2}\sigma\right].\sin\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)\right]}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}s\,.\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}c}=-\frac{\sin\left[45^0-\frac{1}{2}\sigma\right].\cos\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)\right]}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(s-a).\cos\frac{1}{2}(s-b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\left[45^0-\frac{1}{2}\sigma\right].\cos\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)\right]}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a).\sin\frac{1}{2}(s-b)}{\cos\frac{1}{2}c}=-\frac{\sin\left[45^0-\frac{1}{2}\sigma\right].\sin\left[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)\right]}{\cos\frac{1}{2}\gamma}.$$

Vertauscht man in jeder dieser Gleichungen die Buchstaben und bezeichnet die Grössen $\sin\frac{1}{2}s$, $\sin\frac{1}{2}(s-a)$, $\sin\frac{1}{2}(s-b)$, $\sin\frac{1}{2}(s-c)$, $\cos\frac{1}{2}s$, $\cos\frac{1}{2}(s-a)$, $\cos\frac{1}{2}(s-b)$, $\cos\frac{1}{2}(s-c)$ der Reihe nach kurzweg mit s, a, b, c, s', a', b', c', ferner die Grössen $\sin[45^0-\frac{1}{2}\sigma]$, $\sin[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)]$ etc., $\cos[45^0-\frac{1}{2}\sigma]$, $\cos[45^0-\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)]$ etc. der Reihe nach mit σ, α, β, γ, σ', α', β', γ' und endlich die Grössen $\sin\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}b$, $\sin\frac{1}{2}c$, $\cos\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}c$ der Reihe nach mit l, m, n, l', m', n' und $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\beta$, $\sin\frac{1}{2}\gamma$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\beta$, $\cos\frac{1}{2}\gamma$ mit λ, μ, ν, λ', μ', ν', so erhält man folgende 24 Gleichungen:

$$1)\quad \frac{s\,.\,a'}{l}=\frac{\beta'.\gamma'}{\lambda},\qquad \frac{s\,.\,b'}{m}=\frac{\gamma'.\alpha'}{\mu},\qquad \frac{s\,.\,c'}{n}=\frac{\alpha'.\beta'}{\nu};$$

$$2)\quad \frac{s'.\,a}{l}=\frac{\beta\,.\,\gamma}{\lambda},\qquad \frac{s'.\,b}{m}=\frac{\gamma\,.\,\alpha}{\mu},\qquad \frac{s'.\,c}{n}=\frac{\alpha\,.\,\beta}{\nu};$$

$$3)\quad \frac{b'.\,c}{l}=\frac{\beta\,.\,\gamma'}{\lambda'},\qquad \frac{c'.\,a}{m}=\frac{\gamma\,.\,\alpha'}{\mu'},\qquad \frac{a'.\,b}{n}=\frac{\alpha\,.\,\beta'}{\nu'};$$

$$4)\quad \frac{b\,.\,c'}{l}=\frac{\beta'.\,\gamma}{\lambda'},\qquad \frac{c\,.\,a'}{m}=\frac{\gamma'.\,\alpha}{\mu'},\qquad \frac{a\,.\,b'}{n}=\frac{\alpha'.\,\beta}{\nu'};$$

$$5)\quad \frac{s'.\,a'}{l'}=\frac{\sigma'.\,\alpha}{\lambda},\qquad \frac{s'.\,b'}{m'}=\frac{\sigma'.\,\beta}{\mu},\qquad \frac{s'.\,c'}{n'}=\frac{\sigma'.\,\gamma}{\nu};$$

$$6)\quad \frac{s\,.\,a}{l'}=-\frac{\sigma\,.\,\alpha'}{\lambda},\qquad \frac{s\,.\,b}{m'}=-\frac{\sigma\,.\,\beta'}{\mu},\qquad \frac{s\,.\,c}{n'}=-\frac{\sigma\,.\,\gamma'}{\nu};$$

$$7)\quad \frac{b'.\,c'}{l'}=\frac{\sigma'.\,\alpha'}{\lambda'},\qquad \frac{c'.\,a'}{m'}=\frac{\sigma'.\,\beta'}{\mu'},\qquad \frac{a'.\,b'}{n'}=\frac{\sigma'.\,\gamma'}{\nu'};$$

$$8)\quad \frac{b\,.\,c}{l'}=-\frac{\sigma\,.\,\alpha}{\lambda'},\qquad \frac{c\,.\,a}{m'}=-\frac{\sigma\,.\,\beta}{\mu'},\qquad \frac{a\,.\,b}{n'}=-\frac{\sigma\,.\,\gamma}{\nu'}.$$

Durch Multiplication der in der ersten und sechsten Horizontalreihe stehenden Gleichungen erhält man:

$$\frac{s^2.\,a\,.\,a'}{l\,.\,l'}=-\frac{\sigma\,.\,\alpha'.\,\beta'.\,\gamma'}{\lambda^2},\qquad \frac{s^2.\,b\,.\,b'}{m\,.\,m'}=-\frac{\sigma\,.\,\alpha'.\,\beta'.\,\gamma'}{\mu^2},\qquad \frac{s^2.\,c\,.\,c'}{n\,.\,n'}=-\frac{\sigma\,.\,\alpha'.\,\beta'.\,\gamma'}{\nu^2},\qquad \text{(A)}$$

ferner aus Horizontalreihe 2 und 5 auf demselben Wege:

$$\frac{s'^2.\,a\,.\,a'}{l\,.\,l'}=\frac{\sigma'.\,\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma}{\lambda^2},\qquad \frac{s'^2.\,b\,.\,b'}{m\,.\,m'}=\frac{\sigma'.\,\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma}{\mu^2},\qquad \frac{s'^2.\,c\,.\,c'}{n\,.\,n'}=\frac{\sigma'.\,\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma}{\nu^2},\qquad \text{(B)}$$

aus Reihe 4 und 8: $$\frac{a^2 . b . b'}{n . n'} = -\frac{\sigma . \alpha' . \beta . \gamma}{\nu'^2}, \quad \frac{b^2 . c . c'}{l . l'} = -\frac{\sigma . \alpha . \beta' . \gamma}{\lambda'^2}, \quad \frac{c^2 . a . a'}{m . m'} = -\frac{\sigma . \alpha . \beta . \gamma'}{\mu'^2}, \tag{C}$$

aus Reihe 3 und 7: $$\frac{a'^2 . b . b'}{n . n'} = \frac{\sigma' . \alpha . \beta' . \gamma'}{\nu'^2}, \quad \frac{b'^2 . c . c'}{l . l'} = \frac{\sigma' . \alpha' . \beta . \gamma'}{\lambda'^2}, \quad \frac{c'^2 . a . a'}{m . m'} = \frac{\sigma' . \alpha' . \beta' . \gamma}{\mu'^2}, \tag{D}$$

aus Reihe 6 und 8: $$\frac{\sigma^2 . \alpha . \alpha'}{\lambda . \lambda'} = \frac{s . a . b . c}{l'^2}, \quad \frac{\sigma^2 . \beta . \beta'}{\mu . \mu'} = \frac{s . a . b . c}{m'^2}, \quad \frac{\sigma^2 . \gamma . \gamma'}{\nu . \nu'} = \frac{s . a . b . c}{n'^2}, \tag{E}$$

aus Reihe 5 und 7: $$\frac{\sigma'^2 . \alpha . \alpha'}{\lambda . \lambda'} = \frac{s' . a' . b' . c'}{l'^2}, \quad \frac{\sigma'^2 . \beta . \beta'}{\mu . \mu'} = \frac{s' . a' . b' . c'}{m'^2}, \quad \frac{\sigma'^2 . \gamma . \gamma'}{\nu . \nu'} = \frac{s' . a' . b' . c'}{n'^2}, \tag{F}$$

aus Reihe 2 und 3: $$\frac{\alpha^2 . \beta . \beta'}{\nu . \nu'} = \frac{s' . a' . b . c}{n^2}, \quad \frac{\beta^2 . \gamma . \gamma'}{\lambda . \lambda'} = \frac{s' . a . b' . c}{l^2}, \quad \frac{\gamma^2 . \alpha . \alpha'}{\mu . \mu'} = \frac{s' . a . b . c'}{m^2}, \tag{G}$$

aus Reihe 1 und 4: $$\frac{\alpha'^2 . \beta . \beta'}{\nu . \nu'} = \frac{s . a . b' . c'}{n^2}, \quad \frac{\beta'^2 . \gamma . \gamma'}{\lambda . \lambda'} = \frac{s . a' . b . c'}{l^2}, \quad \frac{\gamma'^2 . \alpha . \alpha'}{\mu . \mu'} = \frac{s . a' . b' . c}{m^2}, \tag{H}$$

Wenn man ferner in den Gleichungen 26) in der ersten statt δ den Werth $\sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma$, in der zweiten den Werth $\sin b . \sin\gamma . \sin\alpha$, in der dritten den Werth $\sin c . \sin\alpha . \sin\beta$ einführt und statt der Sinusse die Produkte aus Sinussen und Cosinussen der halben Winkel setzt, so gehen dieselben mit Anwendung unserer Symbole über in:

$$\frac{a . a'}{l . l'} = \frac{\mu . \nu}{\lambda}, \quad \frac{b . b'}{m . m'} = \frac{\nu . \lambda}{\mu}, \quad \frac{c . c'}{n . n'} = \frac{\lambda . \mu}{\nu}. \tag{I}$$

Durch ganz ähnliche Transformationen verwandelt man die Gleichungen 33) in:

$$\frac{\alpha . \alpha'}{\lambda . \lambda'} = \frac{m' . n'}{l'}, \quad \frac{\beta . \beta'}{\mu . \mu'} = \frac{n' . l'}{m'}, \quad \frac{\gamma . \gamma'}{\nu . \nu'} = \frac{l' . m'}{n'}. \tag{K}$$

Der Sinussatz endlich gibt, in unseren Symbolen ausgedrückt, folgende 3 Gleichungen:

$$\frac{l . l'}{m . m'} = \frac{\lambda . \lambda'}{\mu . \mu'}, \quad \frac{m . m'}{n . n'} = \frac{\mu . \mu'}{\nu . \nu'}, \quad \frac{n . n'}{l . l'} = \frac{\nu . \nu'}{\lambda . \lambda'}.$$

Mit Hülfe derselben kann man den Gleichungen (I) und (K) folgende Formen geben:

$$\frac{a . a'}{m . m'} = \frac{\lambda' . \nu}{\mu'}, \quad \frac{b . b'}{n . n'} = \frac{\mu' . \lambda}{\nu'}, \quad \frac{c . c'}{l . l'} = \frac{\nu' . \mu}{\lambda'}, \tag{L}$$

$$\frac{\alpha . \alpha'}{\mu . \mu'} = \frac{l . n'}{m}, \quad \frac{\beta . \beta'}{\nu . \nu'} = \frac{m . l'}{n}, \quad \frac{\gamma . \gamma'}{\lambda . \lambda'} = \frac{n . m'}{l}. \tag{M}$$

Die Gleichungen (I) geben, mit (A) und (B) combinirt, die 2 Gleichungen:

$$s^2 = -\frac{\sigma . \alpha' . \beta' . \gamma'}{\lambda . \mu . \nu} \quad \text{und} \quad s'^2 = \frac{\sigma' . \alpha . \beta . \gamma}{\lambda . \mu . \nu}; \tag{N}$$

die Gleichungen (L), mit (C) und (D):

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= -\frac{\sigma . \alpha' . \beta . \gamma}{\lambda . \mu' . \nu'}, & b^2 &= -\frac{\sigma . \alpha . \beta' . \gamma}{\lambda' . \mu . \nu'}, & c^2 &= -\frac{\sigma . \alpha . \beta . \gamma'}{\lambda' . \mu' . \nu}; \\ a'^2 &= \frac{\sigma' . \alpha . \beta' . \gamma'}{\lambda . \mu' . \nu'}, & b'^2 &= \frac{\sigma' . \alpha' . \beta . \gamma'}{\lambda' . \mu . \nu'}, & c'^2 &= \frac{\sigma' . \alpha' . \beta' . \gamma}{\lambda' . \mu' . \nu}. \end{aligned}\right\} \tag{O}$$

Ebenso erhält man aus (K) mit (E) und (F):

$$\sigma^2 = \frac{s . a . b . c}{l' . m' . n'} \quad \text{und} \quad \sigma'^2 = \frac{s' . a' . b' . c'}{l' . m' . n'}; \tag{P}$$

und aus (M) mit (G) und (H):

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{s' . a' . b . c}{l' . m . n}, & \beta^2 &= \frac{s' . a . b' . c}{l . m' . n}, & \gamma^2 &= \frac{s' . a . b . c'}{l . m . n'}; \\ \alpha'^2 &= \frac{s . a . b' . c'}{l' . m . n}, & \beta'^2 &= \frac{s . a' . b . c'}{l . m' . n}, & \gamma'^2 &= \frac{s . a' . b' . c}{l . m . n'}. \end{aligned}\right\} \tag{Q}$$

Wir wollen nun die Gleichungen (N), (O), (P) und (Q) ihrer symbolischen Form entkleiden, dabei aber der Raumersparniss wegen aus einer Gruppe von 3 zusammengehörigen Gleichungen immer nur eine solche schreiben, aus der die übrigen durch Vertauschung der Buchstaben hervorgehen; dann hat man, wenn man noch bemerkt, dass im Allgemeinen

$$\cos(45^\circ - x) = \sin(45^\circ + x) \quad \text{und} \quad \sin(45^\circ - x) = \cos(45^\circ + x)$$

ist, die merkwürdigen Gleichungen:

$$34)\ \sin^2 \tfrac{1}{2} s = -\frac{\sin[45^\circ - \frac{1}{2}\sigma] \,.\, \sin[45^\circ + \frac{1}{2}(\sigma-\alpha)] \,.\, \sin[45^\circ + \frac{1}{2}(\sigma-\beta)] \,.\, \sin[45^\circ + \frac{1}{2}(\sigma-\gamma)]}{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}\beta \,.\, \sin\frac{1}{2}\gamma},$$

$$35)\ \cos^2 \tfrac{1}{2} s = \frac{\cos[45^\circ - \frac{1}{2}\sigma] \,.\, \cos[45^\circ + \frac{1}{2}(\sigma-\alpha)] \,.\, \cos[45^\circ + \frac{1}{2}(\sigma-\beta)] \,.\, \cos[45^\circ + \frac{1}{2}(\sigma-\gamma)]}{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}\beta \,.\, \sin\frac{1}{2}\gamma},$$

$$36)\ \sin^2 \tfrac{1}{2}(s-a) = -\frac{\sin[45^\circ - \frac{1}{2}\sigma] \,.\, \sin[45^\circ + \frac{1}{2}(\sigma-\alpha)] \,.\, \sin[45^\circ - \frac{1}{2}(\sigma-\beta)] \,.\, \sin[45^\circ - \frac{1}{2}(\sigma-\gamma)]}{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}\beta \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$37)\ \cos^2 \tfrac{1}{2}(s-a) = \frac{\cos[45^\circ - \frac{1}{2}\sigma] \,.\, \cos[45^\circ + \frac{1}{2}(\sigma-\alpha)] \,.\, \cos[45^\circ - \frac{1}{2}(\sigma-\beta)] \,.\, \cos[45^\circ - \frac{1}{2}(\sigma-\gamma)]}{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}\beta \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$38)\ \sin^2[45^\circ - \tfrac{1}{2}\sigma] = \frac{\sin\frac{1}{2}s \,.\, \sin\frac{1}{2}(s-a) \,.\, \sin\frac{1}{2}(s-b) \,.\, \sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a \,.\, \cos\frac{1}{2}b \,.\, \cos\frac{1}{2}c},$$

$$39)\ \cos^2[45^\circ - \tfrac{1}{2}\sigma] = \frac{\cos\frac{1}{2}s \,.\, \cos\frac{1}{2}(s-a) \,.\, \cos\frac{1}{2}(s-b) \,.\, \cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a \,.\, \cos\frac{1}{2}b \,.\, \cos\frac{1}{2}c},$$

$$40)\ \sin^2[45^\circ - \tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)] = \frac{\cos\frac{1}{2}s \,.\, \cos\frac{1}{2}(s-a) \,.\, \sin\frac{1}{2}(s-b) \,.\, \sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a \,.\, \sin\frac{1}{2}b \,.\, \sin\frac{1}{2}c},$$

$$41)\ \cos^2[45^\circ - \tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)] = \frac{\sin\frac{1}{2}s \,.\, \sin\frac{1}{2}(s-a) \,.\, \cos\frac{1}{2}(s-b) \,.\, \cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a \,.\, \sin\frac{1}{2}b \,.\, \sin\frac{1}{2}c}.$$

Wenn man je 2 aufeinanderfolgende der letzten 8 Gleichungen durch einander dividirt, so bekommt man noch folgende 4 neue Gleichungen:

$$42)\ \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} s = -\,\mathrm{tg}[45^\circ - \tfrac{1}{2}\sigma] \,.\, \mathrm{tg}[45^\circ + \tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)] \,.\, \mathrm{tg}[45^\circ + \tfrac{1}{2}(\sigma-\beta)] \,.\, \mathrm{tg}[45^\circ + \tfrac{1}{2}(\sigma-\gamma)],$$

$$43)\ \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}(s-a) = -\,\mathrm{tg}[45^\circ - \tfrac{1}{2}\sigma] \,.\, \mathrm{tg}[45^\circ + \tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)] \,.\, \mathrm{tg}[45^\circ - \tfrac{1}{2}(\sigma-\beta)] \,.\, \mathrm{tg}[45^\circ - \tfrac{1}{2}(\sigma-\gamma)],$$

$$44)\ \mathrm{tg}^2[45^\circ - \tfrac{1}{2}\sigma] = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}s \,.\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(s-a) \,.\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(s-b) \,.\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(s-c),$$

$$45)\ \mathrm{tg}^2[45^\circ - \tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)] = \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}s \,.\, \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}(s-a) \,.\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(s-b) \,.\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(s-c).$$

Unter diesen Formeln finden namentlich 38, 39 und 44, welche letztere den Namen ihres Erfinders L'Huilier trägt, practische Verwendung, weil man mit ihrer Hülfe den sphärischen Excess und damit den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks aus seinen drei Seiten bestimmen kann; der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks ist nämlich, wenn der Radius der zugehörigen Kugel gleich der Einheit angenommen und σ in Bogenmass ausgedrückt wird, gleich dem sphärischen Excess $2\sigma - \pi$. Man kann aber mit ihnen noch eine Menge anderer Aufgaben lösen; z. B. das Dreieck zu bestimmen, wenn die Summe der Seiten, die Summe der Winkel und ein Winkel oder eine Seite gegeben ist oder umgekehrt. Uns kam es jedoch bei diesen Entwickelungen weniger darauf an, Mittel zur Lösnng von Aufgaben zu bieten, als vielmehr den analytischen Zusammenhang unserer Formeln unter einander nachzuweisen.

§. 6. Directe Lösung der zweiten Hauptaufgabe.

Durch die Gleichungen 12 des §. 4 ist zwar die Aufgabe, aus den Seiten die Winkel zu finden, schon gelöst; jedoch haben wir dieselben nicht unmittelbar aus den Fundamentalgleichungen 1, 2, 3 desselben Paragraphen abgeleitet, sondern mit Benutzung der bei der Lösung der ersten Hauptaufgabe auftretenden Formeln erhalten. Es wurde zwar ferner in demselben Paragraphen gezeigt, dass die Lösung der zweiten Hauptaufgabe auf demselben Wege vor sich gehen könne, wie die der ersten, wenn wir nur statt von den Gleichungen 1, 2, 3 von den dualistisch ihnen entsprechenden 16, 17, 18 ausgingen, jedoch bemerkt, dass das erste System vollständig genüge, um alle Hauptaufgaben, also auch diese, zu lösen. Dies wollen wir denn nun jetzt nachweisen. Zu diesem Zwecke sehe man in den Gleichungen 1, 2, 3 des §. 4 die Cosinusse der Winkel α, β, γ als Unbekannte an und bezeichne sie der Reihe nach mit u, v, w, während man die Grössen $\mathrm{cotg}\,b \,.\, \mathrm{cotg}\,c$, $\mathrm{cotg}\,c \,.\, \mathrm{cotg}\,a$, $\mathrm{cotg}\,a \,.\, \mathrm{cotg}\,b$ gleich p, q, r setzt, so hat man das System:

$$\begin{aligned} w \,.\, v + w \,.\, q + v \,.\, r &= p, \\ u \,.\, w + u \,.\, r + w \,.\, p &= q, \\ v \,.\, u + v \,.\, p + u \,.\, q &= r. \end{aligned}$$

Die Substitution $u = u' - p, \quad v = v' - q, \quad w = w' - r$
bewirkt, dass dasselbe übergeht in:

$$w' . v' = p + q . r,$$
$$u' . w' = q + r . p,$$
$$v' . u' = r + p . q,$$

woraus man durch Multiplication und darauf folgende Wurzelausziehung erhält:

$$u' . v' . w' = \sqrt{(p + q . r) . (q + r . p) . (r + p . q)} = W,$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass W das doppelte Zeichen haben kann; dies gibt leicht:

$$u = -p + \frac{W}{p + q . r},$$
$$v = -q + \frac{W}{q + r . p},$$
$$w = -r + \frac{W}{r + p . q}.$$

Nun ist, wenn man statt p, q, r wieder ihre Werthe einsetzt:

$$W = \operatorname{cotg} a . \operatorname{cotg} b . \operatorname{cotg} c . \sqrt{(1 + \operatorname{cotg}^2 a) . (1 + \operatorname{cotg}^2 b) . (1 + \operatorname{cotg}^2 c)}$$
$$= \frac{\cos a . \cos b . \cos c}{\sin^2 a . \sin^2 b . \sin^2 c},$$

und da $p + q . r = \operatorname{cotg} b . \operatorname{cotg} c . (1 + \operatorname{cotg}^2 a) = \dfrac{\cos b . \cos c}{\sin^2 a . \sin b . \sin c}$ ist, so hat man:

$$\frac{W}{p + q . r} = \frac{\cos a}{\sin b . \sin c} \text{ u. s. w.}$$

demnach $u = \dfrac{-\cos b . \cos c \pm \cos a}{\sin b . \sin c}$ u. s. w.

Das positive Zeichen ist zu wählen, weil für $\alpha = 90^0$ die Gleichung übergehen muss in:

$$\cos a = \cos b . \cos c.$$

§. 7. Dritte Hauptaufgabe.

Wir wollen von nun an immer die Fundamentalgleichungen in der Form anwenden, wie sie in §. 3 gegeben sind, und, entsprechend der Bezeichnungsweise des Herrn Diekmann a. a. O. pag. 11, die Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, wenn sie als Unbekannte auftreten, mit x, y, z, dagegen die Grössen $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$ in demselben Falle mit u, v, w bezeichnen. Sind demnach b, c und α gegeben, so heisst unser Gleichungssystem:

$$1) \; u . (1 - y . z . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c) = z . \operatorname{tg} b + y . \operatorname{tg} c,$$
$$2) \; u . z . (1 + \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\alpha) = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c . \cos\alpha,$$
$$3) \; u . y . (1 + \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\alpha) = \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b . \cos\alpha.$$

Wenn man zur Abkürzung $1 + \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\alpha = A$, $\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c . \cos\alpha = B$, $\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b . \cos\alpha = C$ setzt und die Gleichung 1) mit $u . A^2$ multiplicirt, so bekommt dieselbe durch Einführung der Werthe von $u . z$ und $u . y$ aus 2) und 3) die Form:

$$u^2 . A^2 - B . C . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c = A . B . \operatorname{tg} b + A . C . \operatorname{tg} c \quad \text{oder}$$
$$4) \; u^2 . A^2 = B . C . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c + A . (B . \operatorname{tg} b + C . \operatorname{tg} c),$$

während man aus 2) und 3) findet:

$$5) \; z = \frac{B}{A . u} \quad \text{und} \quad 6) \; y = \frac{C}{A . u}.$$

Die Gleichung 4 gibt entwickelt:

$$7) \; \operatorname{tg}^2 a . (1 + \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\alpha + \operatorname{tg}^2 b . \operatorname{tg}^2 c . \sin^2\alpha,$$

ein Resultat, welches eine merkwürdige Uebereinstimmung mit dem Cosinussatz der ebenen Trigonometrie zeigt, und wirklich in diesen übergeht, sobald man die absolute Grösse der Seiten und Winkel unverändert lässt, aber den Radius der zugehörigen Kugel ins Unendliche wachsen lässt. Man kann dasselbe aber auch noch umformen, so dass man eine schon früher gefundene Formel erhält; denn es ist:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 a) . (1 + \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\alpha)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b . \operatorname{tg}^2 c = \frac{1}{\cos^2 b} + \frac{\operatorname{tg}^2 c}{\cos^2 b} = \frac{1}{\cos^2 b . \cos^2 c};$$

daher ist $\cos^2 a = (1 + \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\alpha)^2 . \cos^2 b . \cos^2 c$ und

$$8)\quad \cos a = \pm(\cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha),$$

wo das positive Zeichen zu nehmen ist, weil die Formel für $\alpha = 90^0$ übergehen muss in $\cos a = \cos b \,.\, \cos c$. Um die Logarithmen anwenden zu können, setze man:

$$\operatorname{tg} b \,.\, \cos\alpha = \operatorname{tg} p \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} c \,.\, \cos\alpha = \operatorname{tg} q,$$

so ist entweder $9)\ \cos a = \cos b \,.\, (\cos c + \sin c \,.\, \operatorname{tg} p) = \dfrac{\cos b \,.\, \cos(c-p)}{\cos p}$

oder $10)\ \cos a = \cos c \,.\, (\cos b + \sin b \,.\, \operatorname{tg} q) = \dfrac{\cos c \,.\, \cos(b-q)}{\cos q}$

und aus 5) und 6):

$$11)\quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg}(c-p)}{\operatorname{tg} a}, \qquad \cos\gamma = \frac{\operatorname{tg}(b-q)}{\operatorname{tg} a}.$$

Anstatt zuerst a zu suchen und dann daraus β und γ zu bestimmen, kann man auch den umgekehrten Weg einschlagen.

Zunächst erhält man nämlich durch Division der Gleichungen 5) und 6) das Verhältniss der Cosinusse der Winkel β und γ:

$$12)\quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \,.\, \cos\alpha}{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c \,.\, \cos\alpha};$$

um auch das Verhältniss der Sinusse zu erhalten, quadriren wir jede, ziehen sie dann von der Identität $1 \equiv 1$ ab und dividiren die Resultate, so ist:

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{A^2 \,.\, u^2 - C^2}{A^2 \,.\, u^2 - B^2}$$

oder, wenn wir statt B, C und $A^2 \,.\, u^2$ (Gleichung 7) ihre Werthe einsetzen:

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2\operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\alpha + \operatorname{tg}^2 b \,.\, \operatorname{tg}^2 c \,.\, \sin^2\alpha - (\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \,.\, \cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2\operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\alpha + \operatorname{tg}^2 b \,.\, \operatorname{tg}^2 c \,.\, \sin^2\alpha - (\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c \,.\, \cos\alpha)^2}$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2 b \,.\, \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2 b \,.\, \operatorname{tg}^2 c \,.\, \sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2 c \,.\, \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2 b \,.\, \operatorname{tg}^2 c \,.\, \sin^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 b\,(1 + \operatorname{tg}^2 c)}{\operatorname{tg}^2 c\,(1 + \operatorname{tg}^2 b)} = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 c}.$$

Bei der Wurzelausziehung muss man aus schon früher erörterten Gründen das positive Zeichen wählen und erhält so noch einmal den Sinussatz:

$$13)\quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Aus den beiden Proportionen 12) und 13) bildet man durch correspondirende Addition und Subtraction die neuen:

$$\frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos\beta - \cos\gamma} = \frac{(\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c) \,.\, \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{(\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b) \,.\, \cos^2\frac{1}{2}\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma} = \frac{\sin b + \sin c}{\sin b - \sin c};$$

eine leichte Transformation liefert sie in der Form:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) \,.\, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{\sin(b-c) \,.\, \cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\sin(b+c) \,.\, \sin^2\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c) \,.\, \cos\frac{1}{2}(b-c) \,.\, \cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(b+c) \,.\, \cos\frac{1}{2}(b+c) \,.\, \sin^2\frac{1}{2}\alpha} \qquad \text{(a)}$$

$$\text{und} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) \,.\, \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c) \,.\, \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(b-c). \qquad \text{(b)}$$

Durch Multiplikation und Division geht daraus hervor:

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(b-c)}{\cos^2\frac{1}{2}(b+c)} \cdot \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(b-c)}{\sin^2\frac{1}{2}(b+c)} \cdot \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Bei der Wurzelausziehung fragt es sich, welches Zeichen man zu nehmen habe. Nun ist aber klar, dass man entweder bei beiden Gleichungen zugleich das positive oder bei beiden zugleich das negative Zeichen nehmen müsse, weil ja das Produkt der radicirten Gleichungen mit (a) übereinstimmen muss. Ferner sind alle in der zweiten Gleichung nach der Radicirung vorkommenden Functionen positiv, weil Seiten und Winkel kleiner als 180^0 vorausgesetzt werden; daher darf man bei dieser nach der Wurzelausziehung nur das positive Zeichen nehmen, folglich auch bei der ersten. Somit hat man zur Auffindung der Winkel β und γ die beiden Gleichungen:

$$14)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)} \cdot \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{und} \quad 15)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)} \cdot \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha,$$

welche schon früher (Gleichung 17 und 18 des §. 5) gefunden wurden und den Namen der ersten und zweiten Neper'schen Analogie tragen. Jetzt ergibt sich der Werth von a unmittelbar aus Gleichung 1), nämlich:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma + \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta}{1 - \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma},$$

eine Gleichung, welche zwar nicht für die logarithmische Rechnung bequem ist, aber sehr leicht durch Einführung von Hülfswinkeln dazu geeignet gemacht werden kann. Setzt man nämlich wiederum:

$$\operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma = \operatorname{tg} p \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta = \operatorname{tg} q,$$

so ist sofort $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(p + q)$, woraus, da a den Werth von 180^0 nicht übersteigen kann, unzweideutig $a = p + q$ folgt. Das gewöhnliche Verfahren, die Seite a zu finden, wenn β und γ durch die Neper'schen Analogieen bestimmt sind, besteht in der Anwendung der Gaussischen Gleichungen.

§. 8. Vierte Hauptaufgabe.

Hier ist gegeben β, γ und a, und man sucht $\operatorname{tg} b = v$, $\operatorname{tg} c = w$, $\cos\alpha = x$.

Die Fundamentalgleichungen heissen jetzt:

$$\begin{array}{lrlll}
1) & \operatorname{tg} a = & v \,.\, \cos\gamma & + w \,.\, \cos\beta & + v \,.\, w \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma, \\
2) & -\operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma = & -v & + w \,.\, x & + v \,.\, w \,.\, x \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma, \\
3) & -\operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta = & v \,.\, x & - w & + v \,.\, w \,.\, x \,.\, \operatorname{tg} a \cos\beta.
\end{array}$$

Um daraus zunächst x zu finden, betrachten wir v, w und $v \,.\, w$ als Unbekannte; setzen wir demgemäss:

$$R = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\beta & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \\ -1 & x & x \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma \\ x & -1 & x \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\beta & 0 \\ -1 & x & 0 \\ x & -1 & \operatorname{tg} a\,(x \,.\, \cos\beta + \cos\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{tg} a \,.\, (x \,.\, \cos\beta + \cos\gamma) \,.\, (x \,.\, \cos\gamma + \cos\beta),$$

so ist:

$$R \,.\, v = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} a & \cos\beta & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \\ -\operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma & x & x \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma \\ -\operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta & -1 & x \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} a & \cos\beta & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \\ 0 & x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \\ 0 & -1 + \cos^2\beta & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{tg}^2 a \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \,.\, [(x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \,.\, \cos\beta + \sin^2\beta \,.\, \cos\gamma] = \operatorname{tg}^2 a \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \,.\, (x \,.\, \cos\beta + \cos\gamma);$$

$$R \,.\, w = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \operatorname{tg} a & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \\ -1 & -\operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma & x \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma \\ x & -\operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta & x \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \operatorname{tg} a & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \\ -1 + \cos^2\gamma & 0 & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \\ x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma & 0 & \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{tg}^2 a \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \,.\, [(x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \,.\, \cos\gamma + \sin^2\gamma \,.\, \cos\beta] = \operatorname{tg}^2 a \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) \,.\, (x \,.\, \cos\gamma + \cos\beta);$$

endlich ist

$$R \,.\, v \,.\, w = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\beta & \operatorname{tg} a \\ -1 & x & -\operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma \\ x & -1 & -\operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\beta & \operatorname{tg} a \\ -1 + \cos^2\gamma & x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma & 0 \\ x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma & -1 + \cos^2\beta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{tg} a \,.\, [\sin^2\beta \,.\, \sin^2\gamma - (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma)^2].$$

Da nun $R \,.\, R \,.\, v \,.\, w = R \,.\, v \,.\, R \,.\, w$ ist, so erhält man als Resultante:

$$\operatorname{tg}^2 a \,.\, (x \,.\, \cos\beta + \cos\gamma) \,.\, (x \,.\, \cos\gamma + \cos\beta) \,.\, [\sin^2\beta \,.\, \sin^2\gamma - (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma)^2] =$$
$$= \operatorname{tg}^4 a \,.\, (x \,.\, \cos\beta + \cos\gamma) \,.\, (x \,.\, \cos\gamma + \cos\beta) \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma)^2$$

oder reducirt:

$$\sin^2\beta \,.\, \sin^2\gamma - (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma)^2 = \operatorname{tg}^2 a \,.\, (x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma)^2;$$

dies gibt:

$$(x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma)^2 = \sin^2\beta \,.\, \sin^2\gamma \,.\, \cos^2 a, \quad \text{also}$$

$$4) \quad x = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma \pm \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a,$$

wo nur noch über das Zeichen zu entscheiden ist; für den speciellen Fall, wo $\beta = 90^0$ ist, hat man aber nach Gleichung 6 des §. 2 $\cos\alpha = \sin\gamma \,.\, \cos a$, also das positive Zeichen, welches demnach allgemein gilt.

Ist x gefunden, so hat man weiter:

$$v = \operatorname{tg} a \cdot \frac{x + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}{x \,.\, \cos\gamma + \cos\beta} = \frac{\sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin a}{-\cos\beta \,.\, \cos^2\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos\gamma \,.\, \cos a + \cos\beta}$$

$$= \frac{\sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin a}{\cos\beta \,.\, \sin^2\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos\gamma \,.\, \cos a} = \frac{\sin\beta \,.\, \sin a}{\cos\beta \,.\, \sin\gamma + \sin\beta \,.\, \cos\gamma \,.\, \cos a};$$

es ist daher:

$$5)\ \operatorname{tg} b = \frac{\sin a \,.\, \operatorname{tg}\beta}{\sin\gamma + \cos\gamma \,.\, \operatorname{tg}\beta \,.\, \cos a} \quad \text{und} \quad 6)\ \operatorname{tg} c = \frac{\sin a \,.\, \operatorname{tg}\gamma}{\sin\beta + \cos\beta \,.\, \operatorname{tg}\gamma \,.\, \cos a}.$$

Um Logarithmen anwenden zu können, setze man:

$$\operatorname{tg}\beta \,.\, \cos a = \operatorname{tg} p \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\gamma \,.\, \cos a = \operatorname{tg} q;$$

dann ist entweder

$$7)\ \cos\alpha = \cos\beta \,.\, (-\cos\gamma + \operatorname{tg}\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a) = \cos\beta \,.\, (-\cos\gamma + \operatorname{tg} p \,.\, \sin\gamma)$$

$$= -\cos\beta \cdot \frac{\cos(\gamma + p)}{\cos p}$$

oder $8)\ \cos\alpha = \cos\gamma \,.\, (-\cos\beta + \operatorname{tg} q \,.\, \sin\beta) = -\cos\gamma \cdot \dfrac{\cos(\beta + q)}{\cos q}$

und ferner aus 5) und 6):

$$9)\ \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} p}{\sin\gamma + \cos\gamma \,.\, \operatorname{tg} p} = \operatorname{tg} a \cdot \frac{\sin p}{\sin(\gamma + p)} \quad \text{und} \quad 10)\ \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} q}{\sin\beta + \cos\beta \,.\, \operatorname{tg} q} = \operatorname{tg} a \cdot \frac{\sin q}{\sin(\beta + q)}.$$

Man kann auch hier den umgekehrten Weg gehen und zuerst b und c suchen; die Kenntniss der Verhältnisse der Sinusse und Cosinusse von b und c wird auf eine der vorigen ähnliche Lösung führen. Um das erste Verhältniss zu finden, gehen wir aus von der Gleichung:

$$\sin^2 b = \frac{v^2}{1 + v^2} = \frac{\sin^2\beta \,.\, \sin^2 a}{\sin^2\beta \,.\, \sin^2 a + (\cos\beta \,.\, \sin\gamma + \sin\beta \,.\, \cos\gamma \,.\, \cos a)^2}.$$

Bezeichnen wir den Nenner des Bruches auf der rechten Seite mit N, so ist

$$N = \sin^2\beta \,.\, \sin^2 a + \cos^2\beta \,.\, \sin^2\gamma + 2\sin\beta \,.\, \cos\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos\gamma \,.\, \cos a + \sin^2\beta \,.\, \cos^2\gamma \,.\, \cos^2 a,$$

ferner ist $x^2 = \cos^2\beta \,.\, \cos^2\gamma - 2\sin\beta \,.\, \cos\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos\gamma \,.\, \cos a + \sin^2\beta \,.\, \sin^2\gamma \,.\, \cos^2 a,$

woraus durch Addition folgt:

$$N + x^2 = \sin^2\beta \,.\, \sin^2 a + \cos^2\beta + \sin^2\beta \,.\, \cos^2 a = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1;$$

daher ist $N = 1 - x^2$ uud man hat $\sin^2 b = \dfrac{\sin^2\beta \,.\, \sin^2 a}{1 - x^2}$ und ebenso $\sin^2 c = \dfrac{\sin^2\gamma \,.\, \sin^2 a}{1 - x^2}$. Man erhält also auch hier wiederum den Sinussatz:

$$11)\ \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Man dividire jetzt Gleichung 6) durch 5) und multiplicire die resultirende Gleichung mit 11), so hat man sofort:

$$12)\ \frac{\cos b}{\cos c} = \frac{\sin\gamma \,.\, \cos\beta + \cos\gamma \,.\, \sin\beta \,.\, \cos a}{\sin\beta \,.\, \cos\gamma + \cos\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a}.$$

Die correspondirende Addition und Subtraction lässt aus 11) und 12) hervorgehen:

$$\frac{\sin b + \sin c}{\sin b - \sin c} = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{\cos b + \cos c}{\cos b - \cos c} = \frac{\sin(\beta + \gamma) \,.\, \cos^2 \frac{1}{2} a}{\sin(\gamma - \beta) \,.\, \sin^2 \frac{1}{2} a}$$

oder nach leichter Transformation:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b + c) \,.\, \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(b - c) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \,.\, \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

$$\text{und} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b + c) \,.\, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b - c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) \,.\, \sin^2\frac{1}{2} a}{\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma) \,.\, \cos^2\frac{1}{2} a}.$$

Durch Multiplication und Division dieser Gleichungen erhält man, wenn man noch aus den Resultaten die Wurzel zieht und in Betreff der Zeichen die nämlichen Betrachtungen anstellt, wie bei der vorigen Aufgabe, die dritte und vierte Neper'sche Analogie (Gleichung 19) und 20) des §. 5):

$$13)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b + c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} a \quad \text{und} \quad 14)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b - c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} a.$$

Nachdem man auf diese Weise b und c gefunden hat, ergibt sich der Werth von x aus einer der Gleichungen 1) und 2). Um jedoch elegantere Resultate zu erhalten, eliminire man $\operatorname{tg} a . (1 + v . w . x)$ aus 2) und 3); dies gibt die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} -v + w . x & \cos\gamma \\ v . x - w & \cos\beta \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{v . x - w}{w . x - v}.$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung 12) des vorigen Paragraphen, während 11) mit Gleichung 13) desselben Paragraphen übereinstimmt. Mit ihrer Hülfe gelangt man also genau wie dort zu der ersten und zweiten Neper'schen Analogie, welchen wir jetzt die Form geben:

$$15)\ \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}(b + c)}{\cos \frac{1}{2}(b - c)} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \quad \text{und} \quad 16)\ \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}(b + c)}{\sin \frac{1}{2}(b - c)} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma);$$

man braucht natürlich nur eine derselben, um den Winkel α zu bestimmen.

Wäre man in der vorigen Hauptaufgabe statt von den Fundamentalgleichungen des §. 3 von den ihnen dualistisch entsprechenden Gleichungen 16, 17, 18 des §. 4 ausgegangen, so hätte man in derselben Weise wie hier die vier Neper'schen Analogien als Lösungsmittel erhalten, nur in umgekehrter Reihenfolge. Andererseits würden auch bei unserer Aufgabe die Gleichungen 16, 17 und 18 zuerst die dritte und vierte Neper'sche Analogie geliefert haben, wie bei der vorigen Aufgabe die Gleichungen des §. 3 die erste und zweite, und man hätte dann, nachdem dadurch b und c gefunden waren, durch die Gleichung 16 des §. 4 den fehlenden Winkel α bestimmen können, nämlich:

$$17)\ \operatorname{tg} \alpha = - \frac{\operatorname{tg}\beta . \cos c + \operatorname{tg}\gamma . \cos b}{1 - \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\gamma . \cos b . \cos c}.$$

Um logarithmische Rechnung anwenden zu können, setze man entsprechend der im vorigen Paragraphen gebrauchten Substitution:

$$\operatorname{tg}\beta . \cos c = \operatorname{tg} p \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\gamma . \cos b = \operatorname{tg} q,$$

wodurch $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(p + q)$ oder unzweideutig $180^0 - \alpha = p + q$ wird.

§. 9. Fünfte Hauptaufgabe.

Gegeben sei $b, c, \gamma,$ gesucht $\operatorname{tg} a = u,$ $\cos\alpha = x,$ $\cos\beta = y.$

Die Fundamentalgleichungen heissen jetzt:

$$\begin{aligned} 1)\ \ u &= \operatorname{tg} b . \cos\gamma + y . \operatorname{tg} c + u . y . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\gamma, \\ 2)\ \operatorname{tg} b &= x . \operatorname{tg} c + u . \cos\gamma + u . x . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\gamma, \\ 3)\ \operatorname{tg} c &= u . y + x . \operatorname{tg} b + u . x . y . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c. \end{aligned}$$

Man bilde, um u und x zu eliminiren, noch eine vierte Gleichung, indem man 1) mit x multiplicirt und betrachte in den vier Gleichungen x, u und $u . x$ als Unbekannte, so erhält man als Resultante, die nur y enthält, folgende Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} b . \cos\gamma + y . \operatorname{tg} c & 0 & y . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\gamma - 1 & 0 \\ 0 & y . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\gamma - 1 & 0 & -(\operatorname{tg} b . \cos\gamma + y . \operatorname{tg} c) \\ \operatorname{tg} c & \cos\gamma & \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\gamma & \operatorname{tg} b \\ \operatorname{tg} b & y & y . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c & \operatorname{tg} c \end{vmatrix} = 0.$$

Dadurch, dass man die zweite Vertikalreihe mit $\operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c$ multiplicirt und von der dritten abzieht, dann aber die erste Horizontalreihe mit $\operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c$ multiplicirt und zu der zweiten addirt, erzielt man in der dritten Vertikalreihe drei Nullen und reducirt die Determinante auf den dritten Grad, nämlich:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . (\operatorname{tg} b . \cos\gamma + y . \operatorname{tg} c) & y . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\gamma - 1 & -(\operatorname{tg} b . \cos\gamma + y . \operatorname{tg} c) \\ \operatorname{tg} c & \cos\gamma & \operatorname{tg} b \\ \operatorname{tg} b & y & \operatorname{tg} c \end{vmatrix} = 0,\text{*)}$$

*) Bei dieser Reduction ist der Factor $y . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\gamma - 1$ unberücksichtigt geblieben, weil er nicht gleich Null werden kann. Macht man nämlich diese Annahme, so folgt aus Gleichung 1) auch $\operatorname{tg} b . \cos\gamma + y . \operatorname{tg} c = 0$, was mit $y . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\gamma - 1 = 0$ die unerfüllbare Bedingungsgleichung $\operatorname{tg}^2 b . \cos^2\gamma + 1 = 0$ liefert.

oder, wenn man die mit $\operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c$ multiplicirte dritte Vertikalreihe zur ersten addirt:

$$\begin{vmatrix} 0 & y \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\gamma - 1 & -(\operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma + y \,.\, \operatorname{tg} c) \\ \operatorname{tg} c \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 b) & \cos\gamma & \operatorname{tg} b \\ \operatorname{tg} b \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 c) & y & \operatorname{tg} c \end{vmatrix} = 0.$$

Dies gibt, nach Elementen der ersten Horizontalreihe entwickelt:

$$(y \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\gamma - 1) \,.\, [\operatorname{tg}^2 c \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 b) - \operatorname{tg}^2 b \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 c)] +$$
$$+ (\operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma + y \,.\, \operatorname{tg} c) \,.\, [y \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 b) - \operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma (1 + \operatorname{tg}^2 c)] = 0.$$

Nach Ausführung der Multiplicationen heben sich alle Glieder, welche y in der ersten Potenz enthalten und man hat nur noch:

$$\operatorname{tg}^2 b \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 c) - \operatorname{tg}^2 c \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 b) + y^2 \,.\, \operatorname{tg}^2 c \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 b) - \operatorname{tg}^2 b \,.\, \cos^2\gamma \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 c) = 0.$$

oder
$$y^2 \,.\, \operatorname{tg}^2 c \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 b) = \operatorname{tg}^2 c \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 b) - \operatorname{tg}^2 b \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 c) \,.\, \sin^2\gamma.$$

Daraus folgt endlich:
$$1 - y^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 b \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 c)}{\operatorname{tg}^2 c \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 b)} \cdot \sin^2\gamma = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 c} \cdot \sin^2\gamma$$

oder, wenn man die Wurzel zieht, wobei man aus schon bekannten Gründen nur das positive Zeichen wählen darf:

$$4) \quad \sin\beta = \frac{\sin b \,.\, \sin\gamma}{\sin c}.$$

Man wird also, wie man sieht, nothwendig auf den Sinussatz geführt, wenn man den Winkel β finden will. Jedoch kann dieser Winkel nur dann wirklich existiren, wenn $\sin b \,.\, \sin\gamma \leqq \sin c$ ist, weil andernfalls $\sin\beta$ grösser als 1 werden würde. Ferner ist dieser Winkel, wenn er wirklich existirt, zweideutig, weil zu einem Sinus sowohl ein spitzer als ein stumpfer Winkel gehört, oder, was das nämliche ist, sein Cosinus hat das doppelte Vorzeichen. Man hat demnach aus unserer ersten Fundamentalgleichung:

$$5) \quad u = \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma \pm \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta}{1 \mp \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma}.$$

Je nachdem nun die gegebenen Stücke b, c, γ kleiner oder grösser als 90^0 sind, haben $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$, $\cos\gamma$ bezüglich das positive oder negative Vorzeichen; nimmt man aber blos die absoluten positiven Werthe der zuletzt genannten Grössen und setzt:

$$\operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma = \operatorname{tg} P_b \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta = \operatorname{tg} P_c,$$

wo demnach P_b und P_c Bogen bedeuten, welche $< 90^0$ sind, so hat man für den Fall, dass b und γ zugleich grösser oder kleiner als 90^0 sind und c kleiner als 90^0 ist:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (P_b \pm P_c),$$

wo das obere Zeichen für den positiven Werth von $\cos\beta$ und das untere für den negativen Werth von $\cos\beta$ gilt. Ist aber b und γ zugleich grösser oder kleiner als 90^0 und $c > 90^0$, so ist:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (P_b \mp P_c).$$

Im Falle $b < 90^0$ und $\gamma > 90^0$ oder $b > 90^0$ und $\gamma < 90^0$ und zugleich $c < 90^0$ ist, gilt die Gleichung:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (- P_b \pm P_c),$$

und wenn endlich unter sonst gleichen Umständen $c > 90^0$ ist, so erhält man:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (- P_b \mp P_c).$$

Die acht Werthe von a, welche aus diesen Gleichungen resultiren, gehören nur vier wesentlich verschiedenen Dreiecken an. Denkt man sich nämlich ein Dreieck, in welchem alle Winkel und Seiten α, β, γ, a, b, c kleiner als 90^0 sind, so bilden die drei grössten Kreise, durch deren Bogen das Dreieck gebildet wird, auf der Oberfläche der Kugel acht Dreiecke, von welchen je zwei Scheiteldreiecke, also symmetrisch gleich sind und sich nicht wesentlich von einander unterscheiden; je ein dem ursprünglichen Dreieck anliegendes Dreieck dagegen ergänzt dasselbe zu einem sphärischen Zweieck und ist wesentlich von ihm verschieden. Bezeichnet man die Seiten und Winkel der drei noch möglichen Dreiecke, welche in dieser Weise entstehen, durch die Indices 1, 2, 3, so ist:

$$\begin{array}{llllll} \alpha_1 = \alpha, & \beta_1 = 180^0 - \beta, & \gamma_1 = 180^0 - \gamma, & a_1 = a, & b_1 = 180^0 - b, & c_1 = 180^0 - c, \\ \alpha_2 = 180^0 - \alpha, & \beta_2 = \beta, & \gamma_2 = 180^0 - \gamma, & a_2 = 180^0 - a, & b_2 = b, & c_2 = 180^0 - c, \\ \alpha_3 = 180^0 - \alpha, & \beta_3 = 180^0 - \beta, & \gamma_3 = \gamma, & a_3 = 180^0 - a, & b_3 = 180^0 - b, & c_3 = c. \end{array}$$

Wie man sieht, sind in diesen vier Dreiecken (das ursprüngliche mitgerechnet) entweder die Werthe von a je einander gleich (a und a_1, a_2 und a_3), oder sie ergänzen sich zu 180^0 (a und a_2, a und a_3, a_1 und a_2, a_1 und a_3). Im ersten Falle hat man zwei Dreiecke zusammenzustellen, von welchen in dem einen b und γ zugleich $<$ oder $> 90^0$ und in dem andern ebenfalls b und γ zugleich $<$ oder $> 90^0$ sind, oder aber zwei Dreiecke, von welchen in dem einen $b < 90^0$ und $\gamma > 90^0$ oder umgekehrt ist, im andern aber $b > 90^0$ und $\gamma < 90^0$ oder umgekehrt. Im zweiten Falle gehören je zwei Dreiecke von solcher Beschaffenheit zu einander, dass in dem einen b und γ zugleich $<$ oder $> 90^0$, in dem andern aber b und γ nicht zugleich $<$ oder $> 90^0$, sondern entweder $b < 90^0$ und $\gamma > 90^0$ oder umgekehrt ist.

Bei Berücksichtigung dieses Umstandes erhellt, dass man in unseren oben aufgestellten vier Fällen die Seite a in folgender Weise bestimmen muss:

im ersten Falle hat man $a = P_b + P_c$ oder $P_b - P_c$;
„ zweiten „ „ „ $a = P_b - P_c$ „ $P_b + P_c$;
„ dritten „ „ „ $a = 180^0 - (P_b - P_c)$ oder $180^0 - (P_b + P_c)$;
„ vierten „ „ „ $a = 180^0 - (P_b + P_c)$ „ $180^0 - (P_b - P_c)$;

wo jedesmal der erste Werth von a für das positive $\cos\beta$, der zweite für das negative $\cos\beta$ gilt. Kein Werth von a darf negativ oder grösser als 180^0 werden, weil einestheils ein negatives a ein Dreieck voraussetzte, in welchem statt des Winkels γ sein Supplementwinkel gegeben wäre, anderntheils keine Seite des Dreiecks 180^0 übersteigen soll. Dies tritt aber wirklich in allen unseren vier Fällen bei einem der zwei Werthe des a ein, sobald

$$P_c > P_b$$

ist; dann ist in jedem der vier Fälle immer nur je ein Werth von a positiv und $< 180^0$, d. h. die obige Ungleichheit ist die Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung unserer Aufgabe, und es existirt, wenn sie erfüllt ist, nur ein Dreieck mit den gegebenen Stücken. Da wir unter P_b und P_c Bogen verstehen, welche $< 90^0$ sind, so kann man statt dieser Ungleichheit auch setzen:

$$\operatorname{tg} P_c > \operatorname{tg} P_b,$$

und da ferner $\operatorname{tg} P_b$ gleich dem absoluten Werthe von $\operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma$ und $\operatorname{tg} P_c$ gleich dem absoluten Werthe von $\operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta$ abgesehen vom Zeichen, so erhält die Ungleichheit endlich die Form:

$$\operatorname{tg}^2 c \,.\, \cos^2\beta > \operatorname{tg}^2 b \,.\, \cos^2\gamma.$$

Verwandelt man hier alle Tangenten und Cosinusse in Sinusse, so gibt es:

$$\frac{\sin^2 c \,.\, (1 - \sin^2\beta)}{1 - \sin^2 c} > \frac{\sin^2 b \,.\, (1 - \sin^2\gamma)}{1 - \sin^2 b},$$

oder, wenn man den oben (Gleichung 4) gefundenen Werth von $\sin\beta$ einsetzt:

$$\frac{\sin^2 c - \sin^2 b \,.\, \sin^2\gamma}{1 - \sin^2 c} > \frac{\sin^2 b \,.\, (1 - \sin^2\gamma)}{1 - \sin^2 b}.$$

Die kreuzweise Multiplication liefert, nachdem die gleichen Grössen auf beiden Seiten weggehoben und alle Glieder auf die linke Seite gebracht sind:

$$(\sin^2 c - \sin^2 b)(1 - \sin^2 b \,.\, \sin^2\gamma) > 0\,.$$

Der zweite Factor auf der linken Seite ist seiner Natur nach immer positiv, daher kann diese Ungleichheit nur bestehen, wenn auch der erste Factor positiv ist, d. h. wenn

$$\sin^2 c > \sin^2 b,$$

oder, da die Sinusse der Seiten b und c immer positiv sind, wenn

$$6) \quad \sin c > \sin b \text{ ist.}$$

Von den speciellen Fällen, in welchen diese Bedingung erfüllt wird, die Lösung also eindeutig ist, wollen wir denjenigen hervorheben, wo $\sin c = 1$ oder c gleich einem Quadranten ist. Bemerkenswerth sind ferner einige Ausnahmsfälle, welche durch unsere Bedingungsungleichheit nicht unmittelbar angezeigt werden; zuerst, dass es ebenfalls nur eine Lösung gibt, wenn $b = c$ ist; denn dann ist $\sin\beta = \sin\gamma$, folglich auch $P_b = P_c$ und der eine Werth von a gleich 0 oder 180^0, während der andere gleich $2P_b$ oder $180^0 - 2P_b$ ist; wenn aber $a = 0$ ist, so existirt ebensowenig ein Dreieck, wie wenn $a = 180^0$ ist, in welchem Falle das Dreieck zu einem Zweieck geworden ist. Zweitens kann noch $\sin b = \sin c = \sin\gamma = 1$ sein, wodurch sowohl P_b als auch P_c, folglich auch a unbestimmt wird. Abgesehen von diesen Ausnahmsfällen kann man die allgemeine Regel aufstellen: Ein sphärisches Dreieck ist bestimmt, wenn gegeben sind zwei Seiten und der Winkel, welcher der Seite, die den grösseren Sinus hat, gegenüberliegt.

Mit den gefundenen Werthen von a ist man endlich im Stande, auch die letzte noch fehlende Unbekannte x zu finden. Aus Gleichung 2) folgt nämlich:

$$x = \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma}{\operatorname{tg} c\,(1 + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma)},$$

und wenn man den Hülfswinkel A durch die Gleichung $\operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma = \operatorname{tg} A$ einführt:

$$7)\quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}(b - A)}{\operatorname{tg} c}.$$

Man kann übrigens, um a und α zu finden, in derselben Weise, wie im vorigen Paragraphen, die vier Neper'schen Analogien aus unseren Fundamentalgleichungen entwickeln, und darin jene Grössen als Unbekannte ansehen, so dass:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} a = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-c),$$

$$\text{und}\quad \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma).$$

§. 10. Sechste Hauptaufgabe.

Gegeben β, γ, c, gesucht $\cos\alpha = x$, $\operatorname{tg} a = u$, $\operatorname{tg} b = v$.

Die Fundamentalgleichungen lauten in diesem Falle:

$$\begin{array}{rl}
1) & u = v \,.\, \cos\gamma + \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta + u \,.\, v \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma, \\
2) & v = x \,.\, \operatorname{tg} c + u \,.\, \cos\gamma + u \,.\, v \,.\, x \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\gamma, \\
3) & \operatorname{tg} c = u \,.\, \cos\beta + v \,.\, x + u \,.\, v \,.\, x \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta.
\end{array}$$

Man bilde eine vierte Gleichung dadurch, dass man 1) mit x multiplicirt, und betrachte dann x, u und $u \,.\, x$ als Unbekannte. Man erhält dann als Lösung nach v die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix}
v\,.\cos\gamma + \operatorname{tg} c\,.\cos\beta & 0 & v\,.\operatorname{tg} c\,.\cos\beta\,.\cos\gamma - 1 & 0 \\
0 & v\,.\operatorname{tg} c\,.\cos\beta\,.\cos\gamma - 1 & 0 & -(v\,.\cos\gamma + \operatorname{tg} c\,.\cos\beta) \\
\operatorname{tg} c & \cos\gamma & v\,.\operatorname{tg} c\,.\cos\gamma & v \\
v & \cos\beta & v\,.\operatorname{tg} c\,.\cos\beta & \operatorname{tg} c
\end{vmatrix} = 0.$$

Man multiplicire die zweite Vertikalreihe mit $v \,.\, \operatorname{tg} c$ und ziehe sie von der dritten ab, addire dann die mit $v \,.\, \operatorname{tg} c$ multiplicirte erste Horizontalreihe zur zweiten, so reducirt sich die Determinante auf den dritten Grad, nämlich:

$$\begin{vmatrix}
v\,.\operatorname{tg} c\,.(v\,.\cos\gamma + \operatorname{tg} c\,.\cos\beta) & v\,.\operatorname{tg} c\,.\cos\beta\,.\cos\gamma - 1 & -(v\,.\cos\gamma + \operatorname{tg} c\,.\cos\beta) \\
\operatorname{tg} c & \cos\gamma & v \\
v & \cos\beta & \operatorname{tg} c
\end{vmatrix} = 0,^{*)}$$

$$\text{oder}\quad \begin{vmatrix}
0 & v\,.\operatorname{tg} c\,.\cos\beta\,.\cos\gamma - 1 & -(v\,.\cos\gamma + \operatorname{tg} c\,.\cos\beta) \\
(v^2+1)\,.\operatorname{tg} c & \cos\gamma & v \\
(\operatorname{tg}^2 c + 1)\,.\, v & \cos\beta & \operatorname{tg} c
\end{vmatrix} = 0,$$

und nach Elementen der ersten Horizontalreihe entwickelt:

$$(v \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma - 1) \,.\, [\operatorname{tg}^2 c \,.\, (v^2+1) - v^2 .\, (\operatorname{tg}^2 c + 1)] +$$
$$+ (v \,.\, \cos\gamma + \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta) \,.\, [(v^2+1) \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta - (\operatorname{tg}^2 c + 1) \,.\, v \,.\, \cos\gamma] = 0.$$

---

*) Bei dieser Reduction ist der Factor $v \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma - 1$ unberücksichtigt geblieben, weil er nicht gleich Null werden kann. In der That, setzt man $v \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma - 1 = 0$, so folgt aus Gleichung 1) auch $v \,.\, \cos\gamma + \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta = 0$; aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich aber die unerfüllbare Bedingungsgleichung $\operatorname{tg}^2 c \,.\, \cos^2\beta + 1 = 0$.

Dies gibt, weil sich alle ungeraden Potenzen von v heben:

$$-\operatorname{tg}^2 c \,.\, (v^2+1) \,.\, \sin^2\beta + v^2 \,.\, (\operatorname{tg}^2 c + 1) \,.\, \sin^2\gamma = 0,$$

oder $$\frac{v^2}{v^2+1} \cdot \sin^2\gamma = \frac{\operatorname{tg}^2 c}{\operatorname{tg}^2 c + 1} \cdot \sin^2\beta,$$

woraus sofort

$$4) \quad \sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot \sin c$$

folgt. Damit b möglich sei, muss die Bedingung $\sin\beta \,.\, \sin c \overline{\leqq} \sin\gamma$ erfüllt sein. In diesem Falle hat aber die Seite b zwei Werthe, einen, der kleiner und einen anderen, der grösser als 90^0 ist; die Lösung ist daher im Allgemeinen zweideutig.

Die Seite a findet sich dann durch Gleichung 1):

$$5) \quad u = \operatorname{tg} a = \frac{\pm \operatorname{tg} b \,.\, \cos\gamma + \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta}{1 \mp \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma}.$$

Indem man ähnliche Betrachtungen anstellt, wie bei der vorigen Hauptaufgabe, und die dort gebrauchten Bezeichnungen beibehält, bekommt man im Falle β und c zugleich grösser oder kleiner als 90^0 sind und wenn $\gamma < 90^0$ ist:

$$a = P_b + P_c \quad \text{oder} \quad 180^0 - (P_b - P_c),$$

und wenn unter denselben Umständen $\gamma > 90^0$ ist:

$$a = 180^0 - (P_b - P_c) \quad \text{oder} \quad P_b + P_c,$$

wo der erste Werth von a jedesmal für den spitzen Werth von b, der zweite für den stumpfen Werth von b gilt.

Ist dagegen $\beta < 90^0$ und $b > 90^0$ oder umgekehrt und ausserdem $\gamma < 90^0$, so ist:

$$a = P_b - P_c \quad \text{oder} \quad 180^0 - (P_b + P_c),$$

und wenn unter den nämlichen Umständen $\gamma > 90^0$ ist,

$$a = 180^0 - (P_b + P_c) \quad \text{oder} \quad P_b - P_c.$$

Auch hier sieht man augenblicklich, dass die Lösung eindeutig wird, wenn $P_c > P_b$ ist, d. h. wenn:

$$\frac{\sin^2 c \,.\, (1-\sin^2\beta)}{1-\sin^2 c} > \frac{\sin^2 b \,.\, (1-\sin^2\gamma)}{1-\sin^2 b},$$

oder nach Substituirung des oben (Gleichung 4) gefundenen Werthes von $\sin b$, wenn

$$\frac{\sin^2 c \,.\, (1-\sin^2\beta)}{1-\sin^2 c} > \frac{\sin^2 c \,.\, \sin^2\beta \,.\, (1-\sin^2\gamma)}{\sin^2\gamma - \sin^2 c \,.\, \sin^2\beta}.$$

Die Multiplication mit dem Generalnenner und Reduction liefert die Bedingung in der Form:

$$(\sin^2\gamma - \sin^2\beta) \,.\, (1-\sin^2\beta \,.\, \sin^2 c) > 0,$$

welche nur erfüllt werden kann, wenn $\sin^2\gamma > \sin^2\beta$, oder, weil die Sinusse immer positiv sind, wenn

$$6) \quad \sin\gamma > \sin\beta \quad \text{ist.}$$

Besonders erwähnenswerth ist der specielle Fall, wo $\gamma = 90^0$, das Dreieck also ein rechtwinkeliges ist. Auch hier gibt es ferner nur eine Lösung, wenn $\beta = \gamma$ ist, und die Lösung wird unbestimmt, wenn $\sin\beta = \sin\gamma = \sin c = 1$ ist. Abgesehen von diesen Ausnahmsfällen kann man die allgemeine Regel aufstellen: Ein sphärisches Dreieck ist bestimmt, wenn gegeben sind zwei Winkel und die Seite, welche dem Winkel, der den grösseren Sinus hat, gegenüberliegt.

Den noch fehlenden Winkel α bekommt man durch Gleichung 3):

$$x = \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta}{\operatorname{tg} b \,.\, (1 + \operatorname{tg} c \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta)},$$

wobei man aber die zusammengehörigen Werthe von a und b wählen muss. Führt man hier den Hülfswinkel B durch die Gleichung $\operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta = \operatorname{tg} B$ ein, so ist:

$$7)\quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}(c - B)}{\operatorname{tg} b}.$$

Dass man auch hier wieder, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen, zur Auffindung von a und α die Neper'schen Analogien benutzen kann, liegt auf der Hand.

Schlussbemerkung.

Nachdem wir die Lösungen der sechs Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie aus einem einzigen System von simultanen Fundamentalgleichungen auf rein analytischem Wege durch blosse Elimination hergeleitet haben, bleiben noch die Aufgaben übrig, auf demselben Wege die Beziehungen zwischen den Seiten oder Winkeln des Dreiecks und den Ecktransversalen zu finden, welche die Winkel oder die Seiten oder den Flächeninhalt halbiren oder auf den Seiten senkrecht stehen, ferner die Radien der um- und eingeschriebenen Kreise durch die Seiten oder Winkel des Dreiecks auszudrücken und umgekehrt. Diese Aufgaben führen jedoch zu so umfangreichen Rechnungen, dass sie einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben müssen.