Stoll, F.X. (1888): Über einige Sätze J. Steiner‘s, In: Schlömilch, Oskar, Emil Kahl und Moritz Cantor (Hg.): Zeitschrift für Mathemathik und Physik. 33.Jg., Leipzig, Seite 68 - 100.

VI.

Ueber einige Sätze J. Steiner's.

Von

Dr. Stoll,

Gymnasiallehrer zu Bensheim.

In dem Folgenden habe ich versucht, die Richtigkeit einiger von J. Steiner zum grossen Theil ohne Beweis aufgestellter Sätze durch die analytische Methode nachzuweisen und ihren inneren Zusammenhang herzustellen; hier und da sind dabei auch neue, von Steiner nicht gegebene Resultate gewonnen worden.

Eine Ellipse sei gegeben; wir stellen uns die Aufgabe, eine zweite concentrische Ellipse von gleichen Axenrichtungen zu finden, die so beschaffen ist, dass sie um ein Vieleck von gegebener Seitenzahl beschrieben werden kann, das zugleich der ersten Ellipse eingeschrieben sein soll.

Die Gleichung der gegebenen Ellipse sei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, die der gesuchten $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$, so ist die Gleichung einer Sehne der ersteren:

$$1)\qquad \frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1);$$

soll dieselbe die zweite Ellipse berühren, so gilt die Bedingungsgleichung:

$$2)\qquad \frac{a_1^2}{a^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{b_1^2}{b^2}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1).$$

Dieser Bedingungsgleichung kann man noch verschiedene Formen geben. Führt man nämlich die Functionen der ganzen Winkel ein und setzt zur Abkürzung $a_1=\lambda a$ und $b_1=\mu b$, so erhält man:

$$3)\quad \lambda^2+\mu^2-1=(1-\lambda^2+\mu^2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2+(1+\lambda^2-\mu^2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2;$$

drückt man aber in 2) die Sinus und Cosinus durch die Tangenten aus und setzt der Kürze halber t_1 statt $tg\frac{1}{2}\varphi_1$ und t_2 statt $tg\frac{1}{2}\varphi_2$, so kommt:

$$b^2(a^2-a_1^2)\,t_1^2t_2^2+b^2(a^2-a_1^2)+2[a_1^2b^2+a^2(b^2-b_1^2)]\,t_1t_2=a^2b_1^2(t_1^2+t_2^2)$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$4)\qquad \begin{gathered}\frac{b^2(a^2-a_1^2)}{a^2b_1^2}=\frac{1-\lambda^2}{\mu^2}=A \text{ und}\\ 2\cdot\frac{a_1^2b^2+a^2(b^2-b_1^2)}{a^2b_1^2}=2\cdot\frac{1+\lambda^2-\mu^2}{\mu^2}=C\end{gathered}$$

setzt,

5) $$A t_1^2 t_2^2 + A + C t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2.$$

Zieht man von dem Punkte, dessen Parameter φ_2 ist, eine zweite Sehne nach dem Punkte φ_3, so dass die Bedingung

$$\lambda^2 + \mu^2 - 1 = (1 - \lambda^2 + \mu^2) \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + (1 + \lambda^2 - \mu^2) \sin\varphi_2 \sin\varphi_3$$

erfüllt ist, so berührt diese ebenfalls die zweite Ellipse, und die Grössen λ und μ sind durch diese Gleichung und die Gleichung 3) vollständig bestimmt. Durch Subtraction beider Gleichungen erhält man ausserdem noch die Bedingung:

$$(1 - \lambda^2 + \mu^2) \cos\varphi_2 (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_3) + (1 + \lambda^2 - \mu^2) \sin\varphi_2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_3) = 0$$

oder

$$(1 - \lambda^2 + \mu^2)\, tg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) = (1 + \lambda^2 - \mu^2)\, tg\, \varphi_2$$

oder endlich

6) $$tg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) = \frac{C}{2(A+1)}\, tg\, \varphi_2 = c \,.\, tg\, \varphi_2,$$

wenn man nämlich $\dfrac{C}{2(A+1)} = c$ setzt.

Man kann nun an die gefundene Ellipse von φ_3 aus eine dritte Tangente ziehen, welche die gegebene in einem Punkte φ_4 schneidet, von φ_4 aus eine vierte etc., wobei aus den Gleichungen

$$A t_3^2 t_4^2 + A + C t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2, \quad A t_4^2 t_5^2 + A + C t_4 t_5 = t_4^2 + t_5^2 \text{ etc.}$$

nacheinander die Parameter φ_4, φ_5 etc. gefunden werden können. Zu diesen Gleichungen ist ausser der Gleichung 5) noch die oben nicht erwähnte

$$A t_2^2 t_3^2 + A + C t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2$$

hinzuzufügen. Sollen nun aber alle diese Sehnen ein geschlossenes n-Eck bilden, so muss der Endpunkt der n^{ten} Tangente, der den Parameter φ_{n+1} hat, mit dem Anfangspunkte zusammenfallen oder es muss $\varphi_{n+1} = 360^0 + \varphi_1$ sein; infolge dessen ist die Zahl obiger Gleichungen keine unbegrenzte, sondern es giebt nur n solcher Gleichungen, von denen die letzte heissen muss:

$$A t_n^2 t_1^2 + A + C t_n t_1 = t_n^2 + t_1^2.$$

Diese Bemerkungen genügen, um die Eigenschaften solcher geschlossenen Vielecke zu untersuchen.

Lassen wir den Anfangspunkt der ersten Tangente auf der Peripherie der ersten Ellipse nach einem Punkte vorrücken, dessen Parameter sich von φ_1 nur um den unendlich kleinen Bogen $d\varphi_1$ unterscheidet, so verschiebt sich ihr Endpunkt um $d\varphi_2$, der Endpunkt der zweiten Tangente um $d\varphi_3$ etc., der der n^{ten} um $d\varphi_{n+1}$, wobei alle diese Incremente dasselbe Zeichen erhalten müssen, weil mit dem Wachsthum von φ_1 alle übrigen φ ebenfalls wachsen. Durch Differentiation der Gleichung 5) erhält man nun:

$$[2t_1(At_2^2 - 1) + Ct_2](1 + t_1^2)\, d\varphi_1 + [2t_2(At_1^2 - 1) + Ct_1](1 + t_2^2)\, d\varphi_2 = 0.$$

Die Auflösung der Gleichung 5) nach t_1 oder t_2 ergiebt aber entweder

$$2t_1(At_2^2-1)+Ct_2=\pm\sqrt{4At_2^4+(C^2-4A^2-4)t_2^2+4A}$$

oder

$$2t_2(At_1^2-1)+Ct_1=\pm\sqrt{4At_1^4+(C^2-4A^2-4)t_1^2+4A},$$

woraus folgt:

$$\frac{\sqrt{4At_2^4(C^2-4A^2-4)t_2^2+4A}}{1+t_2^2}\,d\varphi_1=\frac{\sqrt{4At_1^4+(C^2-4A^2-4)t_1^2+4A}}{1+t_1^2}\,d\varphi_2.$$

Links und rechts wurde deshalb das positive Zeichen genommen, weil nach der vorausgeschickten Bemerkung die Incremente $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ dasselbe Zeichen besitzen müssen. Bezeichnet man nun die Coefficienten von $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ kurzweg mit f_2 und f_1, so heisst jetzt die letzte Gleichung: $f_2\,d\varphi_1=f_1\,d\varphi_2$; ebenso findet man $f_3\,d\varphi_2=f_2\,d\varphi_3$, $f_4\,d\varphi_3=f_3\,d\varphi_4$ etc. und endlich $f_{n+1}\,d\varphi_n=f_n\,d\varphi_{n+1}$. Durch Multiplication aller dieser Gleichungen bekommt man $f_{n+1}\,d\varphi_1=f_1\,d\varphi_{n+1}$; weil aber, im Falle das ursprüngliche Vieleck geschlossen war, $f_{n+1}=f_1$ sein muss, so hat man auch $d\varphi_{n+1}=d\varphi_1$, d. h. der Endpunkt der letzten Tangente fällt auch nach der Verschiebung wieder mit dem Anfangspunkte der ersten zusammen oder das Vieleck ist auch jetzt wieder geschlossen. Daraus folgt der Satz:

A. Dreht man ein n-Eck, das einer Ellipse eingeschrieben und einer andern concentrischen Ellipse mit gleichen Axenrichtungen umgeschrieben ist, so, dass seine n Eckpunkte immer auf der Peripherie der ersten Ellipse bleiben, seine $n-1$ ersten Seiten aber die zweite Ellipse berühren, so berührt auch seine n^{te} Seite fortwährend dieselbe Ellipse.

Denkt man sich ferner eine Schaar sich einschliessender concentrischer Ellipsen, deren Axenrichtungen dieselben sind, und legt von einem Punkte φ_1 der ersten an die zweite eine Tangente, so wird der Parameter ihres Endpunktes φ_2 durch die Gleichung $At_1^2t_2^2+A+Ct_1t_2=t_1^2+t_2^2$ bestimmt, der Parameter des Endpunktes der von φ_2 an die dritte gelegten Tangente durch die ähnlich gebildete Gleichung $A't_2^2t_3^2+A'+C't_2t_3=t_2^2+t_3^2$ etc. und man hat ausserdem noch die Differentialgleichungen:

$$\frac{\sqrt{4At_2^4+(C^2-4A^2-4)t_2^2+4A}}{1+t_2^2}\,d\varphi_1=\frac{\sqrt{4At_1^4+(C^2-4A^2-4)t_1^2+4A}}{1+t_1^2}\,d\varphi_2,$$

$$\frac{\sqrt{4A't_3^4+(C'^2-4A'^2-4)t_3^2+4A'}}{1+t_3^2}\,d\varphi_2=\frac{\sqrt{4A't_2^4+(C'^2-4A'^2-4)t_2^2+4A'}}{1+t_2^2}\,d\varphi_3$$

etc.

Nimmt man an, alle Ellipsen seien ähnlich und ähnlichliegend, so ist $\lambda=\mu$, $\lambda'=\mu'$ und man hat $A=\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}$, $A'=\frac{1-\lambda'^2}{\lambda'^2}$ etc.; $C=\frac{2}{\lambda^2}$, $C'=\frac{2}{\lambda'^2}$ etc.; also auch $C^2-4A^2-4=\frac{4}{\lambda^4}-\frac{4(1-\lambda^2)^2}{\lambda^4}-4=8\cdot\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}=8A$ und ebenso $C'^2-4A'^2-4=8A'$. Daher gehen obige Differentialgleichungen über in $d\varphi_1=d\varphi_2=d\varphi_3=\text{etc.}=d\varphi_{n+1}$. Daraus folgt aber, dass, wenn der Endpunkt der Tangente an die letzte Ellipse mit dem Anfangspunkt der ersten zusammenfiel, dies auch dann noch der Fall sein wird, wenn man das Vieleck so verschiebt, dass seine Ecken sich fortwährend auf der ersten Ellipse fortbewegen, seine Seiten aber der Reihe nach die zweite, dritte etc., n^{te} Ellipse berühren. Man hat daher den Satz:

B. Wenn eine Schaar ähnlicher und ähnlichliegender Ellipsen gegeben ist und man von irgend einem Punkte der ersten Ellipse an eine beliebige Ellipse der Schaar eine Tangente legt, von ihrem Endpunkte an eine zweite Ellipse der Schaar eine zweite Tangente und so fort, so wird die Verbindungslinie des Endpunktes der letzten Tangente mit dem Anfangspunkte der ersten immer dieselbe Ellipse der Schaar berühren, wenn man auch das dadurch entstandene Vieleck sich so drehen lässt, dass seine Eckpunkte auf der Peripherie der ersten Ellipse bleiben und die $n-1$ ersten Seiten derselben fortwährend je dieselben Ellipsen der Schaar berühren.

Kehren wir jetzt zu unserem ursprünglichen System von zwei Ellipsen zurück und denken uns ein geschlossenes Vieleck von gerader Seitenzahl, also von $2n$ Seiten, welches der ersten ein- und der zweiten umgeschrieben ist, so gelten dafür folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} At_1^2t_2^2 + A + Ct_1t_2 &= t_1^2 + t_2^2, \\ At_2^2t_3^2 + A + Ct_2t_3 &= t_2^2 + t_3^2, \\ &\;\;\vdots \\ At_{2n}^2t_1^2 + A + Ct_{2n}t_1 &= t_{2n}^2 + t_1^2. \end{aligned}$$

Die Elimination von C aus der ersten und $(n+1)^{\text{ten}}$ derselben, aus der zweiten und $(n+2)^{\text{ten}}$ etc. liefert die n neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A(1-t_1t_2t_{n+1}t_{n+2})(t_{n+1}t_{n+2}-t_1t_2) &= (t_1t_{n+1}-t_2t_{n+2})(t_1t_{n+2}-t_2t_{n+1}), \\ A(1-t_2t_3t_{n+2}t_{n+3})(t_{n+2}t_{n+3}-t_2t_3) &= (t_2t_{n+2}-t_3t_{n+3})(t_2t_{n+3}-t_3t_{n+2}), \\ &\;\;\vdots \\ A(1-t_nt_{n+1}t_{2n}t_1)(t_{2n}t_1-t_nt_{n+1}) &= (t_nt_{2n}-t_{n+1}t_1)(t_nt_1-t_{n+1}t_{2n}). \end{aligned}$$

Diesen n Gleichungen kann in verschiedener Weise zugleich Genüge geleistet werden. Nimmt man nämlich erstens an, es beständen die Relationen

$$t_1 = \pm t_{n+1}, \quad t_2 = \pm t_{n+2}, \quad t_3 = \pm t_{n+3}, \quad \ldots, \quad t_n = \pm t_{2n},$$

wo die positiven Zeichen den positiven und die negativen Zeichen den negativen entsprechen, so werden die zweiten Factoren der linken und der rechten Seite jeder der obigen Gleichungen gleich Null; aber für das positive Zeichen würde man haben $\varphi_1 = 360^0 + \varphi_{n+1}$, $\varphi_2 = 360^0 + \varphi_{n+2}$ etc., d. h. die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks müssten zusammenfallen; bei der Wahl des negativen Zeichens aber müsste $\varphi_1 = 360^0 - \varphi_{n+1}$,

$\varphi_2 = 360^0 - \varphi_{n+2}$ etc. sein, d. h. die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks müssten symmetrisch gegen die Richtung der grossen Axe liegen, was beides unmöglich ist. Es bleibt daher nur möglich, anzunehmen, dass

$$t_1 t_{n+1} = t_2 t_{n+2} = t_3 t_{n+3} = \cdots = t_n t_{2n} = \lambda$$

sei, wo λ eine Constante bedeutet; die genannten Gleichungen gehen nämlich dann über in:

$$A(1-\lambda^2)(\lambda^2 - t_1{}^2 t_2{}^2) = 0, \quad A(1-\lambda^2)(\lambda^2 - t_2{}^2 t_3{}^2) = 0 \text{ etc.},$$

woraus unmittelbar folgt, dass $\lambda = \pm 1$ sein muss. Nähme man das positive Zeichen, so müsste $\varphi_{n+1} = 180^0 - \varphi_1$, $\varphi_{n+2} = 180^0 - \varphi_2$ sein, was bedingen würde, dass die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks symmetrisch zur Richtung der kleinen Axe lägen, — eine Lage, die unmöglich ist; man hat daher das negative Zeichen zu wählen, so dass:

$$7) \qquad t_1 t_{n+1} = t_2 t_{n+2} = t_3 t_{n+3} = \cdots = t_n t_{2n} = -1$$

ist. Aus diesem Resultate folgt aber der Satz:

C. In jedem geschlossenen Vieleck von gerader Seitenzahl, das einer Ellipse eingeschrieben und einer andern concentrischen Ellipse von gleichen Axenrichtungen umgeschrieben ist, liegen die gegenüberliegenden Ecken auf je einem Durchmesser, oder, was dasselbe ist, je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.

Für zwei ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen ist dieser Satz unmittelbar einleuchtend; er gilt aber auch, wie man sieht, wenn die Ellipsen ungleiche Axenverhältnisse haben.

Wenn in eine gegebene Ellipse von den Halbaxen a und b ein geschlossenes Vieleck von bestimmter Seitenzahl eingeschrieben werden soll, dessen Seiten eine andere concentrische Ellipse von denselben Axenrichtungen, deren Halbaxen a_1 und b_1 sind, berühren, so muss zwischen den Grössen a, b und a_1, b_1 oder, was dasselbe ist, zwischen A und C eine gewisse Relation bestehen, die, wie aus Satz A. erhellt, unabhängig ist von den Werthen der Parameter der Eckpunkte des Vielecks. Nun unterscheidet sich unsere Gleichung 5) und die ähnlich gebildeten nur dadurch von der Gleichung 5) in meiner Abhandlung Ueber sphärische Vielecke, die einem Kreise eingeschrieben und einem andern Kreise umgeschrieben sind (Zeitschrift f. Mathematik u. Physik XXIX, 2), dass hier $A = B$ ist; also bleiben auch alle Schlüsse in Bezug auf die erwähnten Relationen für die verschiedenen Vielecke dieselben, und man wird auch hier dieselben Relationen erhalten, wie dort, wenn man nur $A = B$ setzt. Demgemäss ist die Relation für das Dreieck:

$$A^2 - 1 = C,$$

für das Fünfeck:

$$(A^2-1)[(A^2-1)^2 + C(A^2-1) - C^2] = A^2 C^3,$$

für das Viereck:

$$A^2 = 1.$$

für das Sechseck:

$$C^2 A^2 = (A^2 - 1)^2,$$

für das Achteck:

$$(A^2 - 1)^4 = C^4 A^2,$$

für das Zehneck:

$$C^6 A^2 (A^2 - 1)^2 + 2 C^4 A^2 (A^2 - 1)[(A^2 - 1)^2 - C^2 A^2] = [(A^2 - 1)^2 - A^2 C^2]^3,$$

für das Zwölfeck:

$$(A^2 - 1)^4 - A^2 C^4 = A C^2 [C^2 (A^2 + 1) - 2(A^2 - 1)^2].$$

Einige dieser Relationen wollen wir jetzt einer näheren Discussion unterziehen. Setzt man zuerst in die Relation für das Dreieck $A^2 - 1 = C$ die Werthe von $A = \frac{1 - \lambda^2}{\mu^2}$ und $C = 2 \frac{\lambda^2 - \mu^2 + 1}{\mu^2}$ ein, so kommt:

$$(1 - \lambda^2)^2 - \mu^4 = 2\mu^2 (\lambda^2 - \mu^2 + 1)^2 \text{ oder } \lambda^4 - 2(1 + \mu^2)\lambda^2 + (1 - \mu^2)^2 = 0;$$

dies giebt $\lambda^2 = 1 + \mu^2 \pm 2\mu$. Nimmt man das positive Zeichen, so ist $\lambda = \pm (1 + \mu)$, wählt man aber das negative, so ist $\lambda = \pm (1 - \mu)$; nun ist aber weder $\lambda = 1 + \mu$, noch $\lambda = -(1 + \mu)$, noch $\lambda = -(1 - \mu)$ möglich, weil λ und μ ihrer Natur nach positive echte Brüche sind; es bleibt daher als Relation für das Dreieck übrig:

8) $$\lambda + \mu = 1.$$

Für das Viereck hat man $A = \pm 1$, d. h. $1 - \lambda^2 = \pm \mu^2$, wo aus demselben Grunde das negative Vorzeichen nicht genommen werden darf, so dass die Relation heisst:

9) $$\lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

Das Sechseck hat die Relation

$$A^2 - 1 = \pm AC \text{ oder } (1 - \lambda^2)^2 - \mu^4 = \pm 2(1 - \lambda^2)(\lambda^2 + 1 - \mu^2),$$

also entweder

$$\mu^4 - 2(1 - \lambda^2)\mu^2 + 2(1 - \lambda^4) - (1 - \lambda^2)^2 = 0$$

oder

$$\mu^4 + 2(1 - \lambda^2)\mu^2 - 2(1 - \lambda^4) - (1 - \lambda^2)^2 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\mu^2 = (1 - \lambda^2) \pm \sqrt{2(1 - \lambda^2)^2 - 2(1 - \lambda^4)} = 1 - \lambda^2 \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 1},$$

was complexe Werthe giebt; aus der zweiten Gleichung aber findet man

$$\mu^2 = -(1 - \lambda^2) \pm \sqrt{2(1 - \lambda^2)^2 + 2(1 - \lambda^4)} = -(1 - \lambda^2) \pm 2\sqrt{1 - \lambda^2};$$

hier ist selbstverständlich nur das positive Zeichen zulässig und man hat deshalb als Relation für das Sechseck: $\mu^2 - \lambda^2 + 1 = 2\sqrt{1 - \lambda^2}$ oder

10) $$\sqrt{1 - \lambda^2} + \sqrt{1 - \mu^2} = 1,$$

wo bei beiden Wurzeln das positive Zeichen zu nehmen ist.

Beim Achteck gilt die Relation

$$(A^2 - 1)^2 = \pm A C^2 \text{ oder } [(1 - \lambda^2)^2 - \mu^4]^2 = \pm 4\mu^2 (1 - \lambda^2)[\lambda^2 + 1 - \mu^2]^2;$$

das negative Zeichen rechts ist unbrauchbar, weil $1 - \lambda^2$ positiv ist und sonst nur Quadrate vorkommen. Um aber bei der Wahl des positiven Zeichens der Relation eine mehr symmetrische Gestalt zu geben, gehe man von der Identität aus:

$$[\lambda^2+\mu^2-1]^4-[(1-\lambda^2)^2-\mu^4]^2=-4\mu^2(1-\lambda^2)[\lambda^2+\mu^2-1]^2;$$

diese giebt dann, verbunden mit der obigen Relation:

$$11)\qquad (\lambda^2+\mu^2-1)^4=16\lambda^2\mu^2(1-\lambda^2)(1-\mu^2).$$

Wir wollen uns jetzt auf einer gegebenen Ellipse zwei feste Punkte von den Parametern φ_1 und φ_n denken und dazwischen $n-2$ bewegliche Punkte $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$; in innigem Zusammenhang mit den bisherigen Auseinandersetzungen steht dann, wie wir sehen werden, die Frage, in welcher Weise die Sehnen $\varphi_1\varphi_2, \varphi_2\varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}\varphi_n$ gezogen werden müssen, damit ihre Summe ein **Maximum** sei. Die Entfernung des Punktes φ_2 von φ_1 wird ausgedrückt durch

$$\sqrt{a^2(\cos\varphi_2-\cos\varphi_1)^2+b^2(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)^2}$$
$$=2\sin\tfrac12(\varphi_2-\varphi_1)\sqrt{a^2\sin^2\tfrac12(\varphi_2+\varphi_1)+b^2\cos^2\tfrac12(\varphi_2+\varphi_1)},$$

und es soll daher die Summe

$$u=2\sin\tfrac12(\varphi_2-\varphi_1)W_{21}+2\sin\tfrac12(\varphi_3-\varphi_2)W_{32}+\cdots$$
$$+2\sin\tfrac12(\varphi_n-\varphi_{n-1})W_{n,\,n-1}$$

ein Maximum werden, wobei wir der Abkürzung halber

$$\sqrt{a^2\sin^2\tfrac12(\varphi_k+\varphi_{k-1})+b^2\cos^2\tfrac12(\varphi_k+\varphi_{k-1})}=W_{k,\,k-1}$$

gesetzt haben. Die partielle Differentiation nach $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$ ergiebt $n-2$ Bedingungsgleichungen, die alle ähnlich gebaut sind und von denen die erste heisst:

$$W_{21}\cos\tfrac12(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{(a^2-b^2)\sin\tfrac12(\varphi_2-\varphi_1)\sin(\varphi_2+\varphi_1)}{2W_{21}}$$
$$-W_{32}\cos\tfrac12(\varphi_3-\varphi_2)+\frac{(a^2-b^2)\sin\tfrac12(\varphi_3-\varphi_2)\sin(\varphi_3+\varphi_2)}{2W_{32}}=0.$$

Nach vorgenommener Reduction erhält dieselbe die Gestalt

$$\frac{a^2\sin\tfrac12(\varphi_2+\varphi_1)\sin\varphi_2+b^2\cos\tfrac12(\varphi_2+\varphi_1)\cos\varphi_2}{W_{21}}$$
$$=\frac{a^2\sin\tfrac12(\varphi_3+\varphi_2)\sin\varphi_2+b^2\cos\tfrac12(\varphi_3+\varphi_2)\cos\varphi_2}{W_{32}}$$

oder

$$\frac{a^2\,tg\,\tfrac12(\varphi_2+\varphi_1)\,tg\,\varphi_2+b^2}{\sqrt{a^2\,tg^2\tfrac12(\varphi_2+\varphi_1)+b^2}}=\frac{a^2\,tg^2\tfrac12(\varphi_3+\varphi_2)\,tg\,\varphi_2+b^2}{\sqrt{a^2\,tg^2\tfrac12(\varphi_3+\varphi_2)+b^2}}.$$

Nun sind die Gleichungen der Sehnen 12 und 23 bezüglich

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac12(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{y}{b}\sin\tfrac12(\varphi_2+\varphi_1)=\cos\tfrac12(\varphi_2-\varphi_1)$$

und

$$\frac{x}{b}\cos\tfrac12(\varphi_3+\varphi_2)+\frac{y}{b}\sin\tfrac12(\varphi_3+\varphi_2)=\cos\tfrac12(\varphi_3-\varphi_2),$$

also, wenn man die Winkel, welche diese Linien mit der Abscissenaxe bilden, kurzweg mit $(12, a)$ und $(23, a)$ bezeichnet:

$$tg(12, a) = -\frac{b}{a}\, cotg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) \text{ und } tg(23, a) = -\frac{b}{a}\, cotg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2);$$

ferner ist die Gleichung der Normale in φ_2:

$$y - b\, sin\, \varphi_2 = \frac{a}{b}\, tg\, \varphi_2 (x - a\, cos\, \varphi_2), \text{ daher } tg(n, a) = \frac{a}{b}\, tg\, \varphi_2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in obige Bedingungsgleichung nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$\frac{1 - tg(n, a)\, cotg(12, a)}{\sqrt{1 + cotg^2(12, a)}} = \frac{1 - tg(n, a)\, cotg(23, a)}{\sqrt{1 + cotg^2(23, a)}},$$

was mit $sin[(12, a) - (n, a)] = sin[(23, a) - (n, a)]$ identisch ist. Daraus schliesst man:

$$(12, a) - (n, a) = 180^0 + (n, a) - (23, a),$$

d. h. **die Normale in φ_2 hälftet den Winkel zwischen 12 und 23** u. s. w. Die aufeinander folgenden Sehnen 12, 23, ..., $(n-1, n)$ bilden also eine gebrochene Linie, die mit dem Wege eines Lichtstrahls identisch ist, der von φ_1 ausgeht und, nachdem er an $n-2$ Punkten reflectirt worden ist, nach φ_n gelangt.

Wir wollen nun annehmen, der Strahl 12 sei gegeben und werde vermöge des Lichtreflexionsgesetzes nach φ_3 reflectirt, so berühren die **zwei** Strahlen 12 und 23 irgend eine mit der gegebenen Ellipse concentrische Ellipse von gleichen Axenrichtungen, die dadurch vollständig bestimmt ist. Um zu finden, in welcher Beziehung ihre Axen zu denen der ursprünglichen Ellipse stehen, mache man dieselben Substitutionen, wie oben, in die beiden Bedingungsgleichungen der Berührung [vergl. Gl. 2)]:

$$\frac{a_1^{\,2}}{a^2} cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{b_1^{\,2}}{b^2} sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) = cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

und

$$\frac{a_1^{\,2}}{a^2} cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2) + \frac{b_1^{\,2}}{b^2} sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2) = cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi_2),$$

nachdem man sie, wie folgt, umgeformt hat:

$$\left[\frac{a^2 - a_1^{\,2}}{a^2} + \frac{b^2 - b_1^{\,2}}{b^2} tg^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)\right](1 + tg^2 \varphi_2) = [tg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) - tg\, \varphi_2]^2,$$

$$\left[\frac{a^2 - a_1^{\,2}}{a^2} + \frac{b^2 - b_1^{\,2}}{b^2} tg^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2)\right](1 + tg^2 \varphi_2) = [tg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2) - tg\, \varphi_2]^2.$$

Man erhält so:

$$[(a^2 - a_1^{\,2}) + (b^2 - b_1^{\,2})\, cotg^2(12, a)][a^2 + b^2\, tg^2(n, a)] \\ = b^2[cotg(12, a) + tg(n, a)]^2$$

und

$$[(a^2 - a_1^{\,2}) + (b^2 - b_1^{\,2})\, cotg^2(23, a)][a^2 + b^2\, tg^2(n, a)] \\ = b^2[cotg(23, a) + tg(n, a)]^2.$$

Die Ausdrücke in den Klammern rechts sind aber bezüglich gleich $\frac{cos[(12, a) - (n, a)]}{sin(12, a)\, cos(n, a)}$ und $\frac{cos[(23, a) - (n, a)]}{sin[(23, a)\, cos(n, a)]}$, und weil $(12, a) - (n, a) = 180^0 - [(23, a) - (n, a)]$ ist, so muss $cos^2[(12, a) - (n, a)] = cos^2[(23, a) - (n, a)]$ sein; man erhält daher durch Division obiger Gleichungen:

$$(a^2-a_1^2)\sin^2(12,a)+(b^2-b_1^2)\cos^2(12,a)$$
$$=(a^2-a_1^2)\sin^2(23,a)+(b^2-b_1^2)\cos^2(23,a)$$

oder

$$[(a^2-a_1^2)-(b^2-b_1^2)][\sin^2(12,a)-\sin^2(23,a)]=0.$$

Da der zweite Factor auf der linken Seite nicht Null sein kann, so muss

$$a^2-a_1^2=b^2-b_1^2$$

sein, d. h. die Sehnen 22) und 23) berühren eine der gegebenen confocale Ellipse; dieselbe Ellipse muss aber auch, wie aus der Symmetrie der zu verwendenden Gleichungen erhellt, von allen folgenden Sehnen 34, 35 etc. berührt werden, sobald ihre Richtungen durch das Lichtreflexionsgesetz bestimmt werden. Infolge dessen gilt der Satz:

D. Wenn man in eine Ellipse eine Reihe aufeinander folgender Sehnen so einschreibt, dass der Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden durch die Normale in ihrem gemeinschaftlichen Punkte gehälftet wird, so ist die Summe aller dieser Sehnen grösser als die Summe irgendwelcher ebenso zahlreicher Sehnen, welche man vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkt der letzten ziehen kann, und alle diese Sehnen berühren eine der gegebenen confocale Ellipse.

Umgekehrt ziehe man von einem Punkte 1 der gegebenen Ellipse eine Tangente an die ihr confocale mit den Axen $\sqrt{a^2-\varrho^2}$ und $\sqrt{b^2-\varrho^2}$ und von ihrem Endpunkte 2 eine zweite Tangente 23, so gelten die zwei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{a^2-\varrho^2}{a^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{b^2-\varrho^2}{b^2}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$$

und

$$\frac{a^2-\varrho^2}{a^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)+\frac{b^2-\varrho^2}{b^2}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)=\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_2),$$

welche man in der nämlichen Weise, wie oben geschehen, umformen kann in:

$$\varrho^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}tg^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\right](1+tg^2\varphi_2)=[tg\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)-tg\,\varphi_2]^2$$

und

$$\varrho^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}tg^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)\right](1+tg^2\varphi_2)=[tg\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)-tg\,\varphi_2]^2.$$

Dann ergiebt aber die Elimination von ϱ^2 die neue Bedingungsgleichung·

$$\frac{b^2+a^2\,tg^2\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{b^2+a^2\,tg^2\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)}=\frac{[tg\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)-tg\,\varphi_2]^2}{[tg\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)-tg\,\varphi_2]^2}$$

oder, wenn man die erwähnten Substitutionen auch hier vornimmt:

$$\frac{1+cotg^2(12,a)}{1+cotg^2(23,a)}=\frac{[cotg(12,a)+tg(n,a)]^2}{[cotg(23,a)+tg(n,a)]^2},$$

d. h.

$$\cos[(12,a)-(n,a)]=\pm\cos[(23,a)-(n,a)].$$

Für das positive Zeichen hat man $(12, a) - (n, a) = 360^0 - (23, a) + (n, a)$, was hier keinen Sinn hat; das negative Zeichen aber giebt wieder wie oben: $(12, a) - (n, a) = 180^0 - (23, a) + (n, a)$. Daher hat men folgenden Satz:

E. Wenn man von einem Punkte einer Ellipse aus eine Reihe von Sehnen zieht, welche eine der gegebenen confocale Ellipse berühren, so werden die Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Sehnen durch die Normale in ihrem gemeinschaftlichen Punkte gehälftet und die Summe aller dieser Sehnen ist ein Maximum, wenn man den Anfangspunkt der ersten und den Endpunkt der letzten als fest ansieht.

Zieht man von einem gegebenen Punkte 1 der Ellipse die erste Sehne 12 nach einem gegebenen Punkte 2, so wird im Allgemeinen der Endpunkt der n^{ten} Sehne nicht mit dem Anfangspunkte der ersten zusammenfallen; damit dies geschieht, müssen für jedes n-Eck die oben angegebenen Relationen erfüllt sein, zu denen noch die Relation $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$ hinzukommt, wodurch die confocale Ellipse vollständig bestimmt wird.

So hat man z. B. für das Dreieck die beiden Relationen $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1$ und $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$ zu combiniren, woraus man

$$a_1 = a \cdot \frac{-b^2 + \sqrt{a^4 + b^4 - a^2 b^2}}{a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad b_1 = b \cdot \frac{a^2 - \sqrt{a^4 + b^4 - a^2 b^2}}{a^2 - b^2}$$

erhält. Durch Elimination der Wurzelgrösse entsteht die merkwürdige Relation:

12) $$(a_1 + b_1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Für das Viereck erhält man aus $\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{b_1^2}{a^2} = 1$ und $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$:

$$a_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

woraus sich die auch von Steiner angegebene Relation ergiebt:

13) $$a_1 : b_1 = a^2 : b^2.$$

Das Sechseck erfordert die Combination von $\frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - b_1^2}}{b} = 1$ mit $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$; dies giebt

$$a_1^2 = a^3 \cdot \frac{(a + 2b)}{(a + b)^2} \quad \text{und} \quad b_1^2 = b^3 \cdot \frac{(2a + b)}{(a + b)^2},$$

woraus folgende Relation entspringt:

14) $$\frac{a_1^2}{a^3} + \frac{b_1^2}{b^3} = \frac{3}{a + b}.$$

Der oben ganz allgemein bewiesene Satz A. gilt natürlich auch jetzt noch, wo die berührte Ellipse der gegebenen confocal ist, und da dann bei jeder Lage, welche das n-Eck infolge seiner Verschiebung annimmt, sein Umfang ein Maximum, das totale Differential des letzteren daher gleich Null ist, so könnte man schon daraus schliessen, dass derselbe constant bleibt; wir ziehen es aber vor, einen directen Beweis dieser Eigenschaft zu geben. Die Länge der Sehne 12 oder s_{12} ist gleich

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\sqrt{a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}.$$

Wenn man nun aber wiederum $\sqrt{a^2-\varrho^2}$ und $\sqrt{b^2-\varrho^2}$ als Axen der confocalen Ellipse annimmt, so folgt aus der Bedingungsgleichung 2), nämlich:

$$\frac{a^2-\varrho^2}{a^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{b^2-\varrho^2}{b^2}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1),$$

dass

$$\varrho^2[a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)]=a^2b^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$$

ist. Dadurch wird

$$s_{12}=\frac{2ab}{\varrho}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1),$$

also der Umfang:

$$15)\quad u=\frac{2ab}{\varrho}\{\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_n)+\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)+\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_2)+\cdots+\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})\}.$$

Andererseits hat man aber auch

$$s_{12}=\frac{2ab}{\varrho}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{2\varrho}{ab}[a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)]$$
$$=\frac{2\varrho}{ab}[(a^2-b^2)\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2],$$

folglich der Umfang:

$$16)\quad u=\frac{2\varrho(a^2-b^2)}{ab}\{\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_n)+\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)+\cdots+\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})\}+\frac{2\varrho bn}{a}.$$

Da bei einer Verschiebung des Anfangspunktes, dessen Parameter φ_1 ist, auch alle übrigen φ sich ändern, so ist der totale Differentialquotient des Umfanges nach φ_1 infolge der Formel 15):

$$\frac{du}{d\varphi_1}=\frac{ab}{\varrho}\left\{[\sin(\varphi_1-\varphi_n)-\sin(\varphi_2-\varphi_1)]+[\sin(\varphi_2-\varphi_1)-\sin(\varphi_3-\varphi_2)]\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}+[\sin(\varphi_3-\varphi_2)-\sin(\varphi_4-\varphi_3)]\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}+\text{etc.}\right\}$$

oder abgekürzt:

$$\frac{du}{d\varphi_1}=\frac{ab}{\varrho}\cdot K.$$

Berechnet man denselben Differentialquotienten aus Formel 16), so findet man das Resultat:

$$\frac{du}{d\varphi_1}=\frac{\varrho(a^2-b^2)}{ab}\left\{[\sin(\varphi_1+\varphi_n)+\sin(\varphi_2+\varphi_1)]+[\sin(\varphi_2+\varphi_1)+\sin(\varphi_3+\varphi_2)]\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}+[\sin(\varphi_3+\varphi_2)+\sin(\varphi_4+\varphi_3)]\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}+\text{etc.}\right\}$$

oder abgekürzt:

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{\varrho\,(a^2-b^2)}{a\,b}\cdot K'.$$

Nach Gl. 6) hat man ferner

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_1) = c.tg\,\varphi_2 \text{ etc., also } \frac{sin\,\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_1+2\,\varphi_2)}{sin\,\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_1-2\,\varphi_2)} = \frac{1+c}{1-c};$$

durch Multiplication des Zählers und Nenners der linken Seite mit $2\,cos\,\frac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_1)$ erhält diese die Form:

$$\frac{sin(\varphi_2+\varphi_1)+sin(\varphi_3+\varphi_2)}{sin(\varphi_2-\varphi_1)-sin(\varphi_3-\varphi_2)}$$

so dass

$$sin(\varphi_2+\varphi_1)+sin(\varphi_3+\varphi_2) = \frac{1+c}{1-c}\left[sin(\varphi_2-\varphi_1)-sin(\varphi_3-\varphi_2)\right],$$

also auch

$$K' = \frac{1+c}{1-c}\cdot K$$

wird. Da nun aber auch die beiden Werthe des Differentialquotienten $\dfrac{du}{d\varphi_1}$ einander gleich sein müssen, so erhält man durch Subtraction:

$$0 = \left[\frac{a\,b}{\varrho} - \frac{\varrho\,(a^2-b^2)(1+c)}{a\,b\,(1-c)}\right]\cdot K.$$

Nach Gl. 6) ist

$$c = \frac{C}{2\,(A+1)}, \quad \text{also} \quad \frac{1+c}{1-c} = \frac{2\,(A+1)+C}{2\,(A+1)-C},$$

nach Gl. 4) aber

$$A = \frac{\varrho^2\,b^2}{a^2\,(b^2-\varrho^2)} \quad \text{und} \quad C = 2\cdot\frac{\varrho^2\,(a^2-b^2)+a^2\,b^2}{a^2\,(b^2-\varrho^2)};$$

daraus findet man weiter:

$$\frac{1+c}{1-c} = -\frac{a^2\,b^2}{\varrho^2\,(a^2-b^2)},$$

wodurch die letzte Gleichung des vorigen Absatzes übergeht in:

$$0 = \frac{2\,a\,b}{\varrho}\cdot K.$$

Dieses Product kann nur Null sein, wenn der erste Factor $\dfrac{2\,a\,b}{\varrho}$ oder der zweite Factor K gleich Null ist; zum Nullwerden des ersten Factors gehört $\varrho = \infty$, was unmöglich ist; folglich ist $K = 0$ und daher auch $K' = 0$. Dann folgt aber aus beiden Formen des Differentialquotienten, dass $\dfrac{du}{d\varphi_1} = 0$ ist oder dass der Umfang bei jeder Verschiebung des Vielecks constant bleibt.

Legt man umgekehrt an die innere Ellipse Tangenten in Punkten, deren Parameter ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 etc. so gewählt sind, dass ein geschlossenes Vieleck entsteht, dessen Ecken auf einer confocalen Ellipse liegen, so ist der Umfang dieses Vielecks ebenfalls constant, wie man auch das Vieleck verschieben mag. Man kann nun aber diesen Umfang auch durch die Axen der inneren Ellipse und die Parameter ϑ ausdrücken; das Differential dieser Function muss dann, weil sie constant ist, gleich Null sein, was in Bezug auf alle Vielecke von gleicher Seitenzahl, welche der inneren Ellipse umgeschrieben sind, einem Minimum entspricht, weil man, wenn man sich für einen Augenblick die äussere Ellipse ganz wegdenkt, die ϑ so wählen kann, dass der Umfang ins Unendliche wächst, während er immer grösser sein muss als der Umfang der inneren Ellipse. Alle diese Resultate sind in folgendem Satze enthalten:

F. Ein geschlossenes Vieleck, das einer Ellipse eingeschrieben und zugleich einer confocalen Ellipse umgeschrieben ist, besitzt fortwährend denselben Umfang, auch wenn man dasselbe so verschiebt, dass seine Ecken immer auf der ersten Ellipse liegen und seine Seiten immer die confocale Ellipse berühren, und dabei hat dasselbe unter allen Vielecken, die man der ersten Ellipse einschreiben kann, den **grössten**, und unter allen Vielecken, die man der zweiten Ellipse umschreiben kann, den **kleinsten** Umfang.

Unsere seitherigen Untersuchungen geben uns ferner die Mittel an die Hand, den Umfang eines derartigen Vielecks zu berechnen, wobei wir uns auf die Betrachtung des Dreiecks, Sechsecks und Vierecks beschränken wollen. Da nämlich der Umfang sich nicht ändert, wenn man φ_1 willkürlich annimmt, so kann man $\varphi_1 = 0$ setzen und daraus für jedes Vieleck nach den Gleichungen 5) die Werthe der folgenden Parameter berechnen. Diese hat man dann in Formel 15), welche den Umfang als Function dieser Parameter ausdrückt, einzuführen; die dort vorkommende Grösse ϱ ist gleich $\sqrt{a^2 - a_1^2} = \sqrt{b^2 - b_1^2}$ und kann aus den für jedes einzelne Vieleck gefundenen Werthen von a_1 und b_1, in a und b ausgedrückt, berechnet werden.

So hat man beim Dreieck für $\varphi_1 = 0$ noch

$$\varphi_3 = 360^0 - \varphi_2, \text{ also } u = \frac{2ab}{\varrho}[2\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi_2 + \sin^2\varphi_2] = \frac{2ab}{\varrho}[2 - \cos\varphi_2 - \cos^2\varphi_2];$$

aus Gleichung 5) folgt aber

$$t_2^2 = A, \text{ also } \cos\varphi_2 = \frac{1-A}{1+A},$$

wodurch

$$u = \frac{4abA(3+A)}{\varrho(1+A)^2}$$

erhalten wird. Ferner ist

$$A = \frac{\varrho^2 b^2}{a^2(b^2-\varrho^2)} \text{ und } \varrho^2 = a^2 - a_1^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}[2\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2} - (a^2+b^2)],$$

wodurch man in den Stand gesetzt ist, alle zur Berechnung von u nöthigen Grössen zu finden; die ausgeführte Rechnung liefert ein complicirtes, wenig übersichtliches Resultat.

Besser fährt man in dieser Beziehung mit dem Sechseck. Für $\varphi_1 = 0$ ist hier $\varphi_3 = 180^0 - \varphi_2$, $\varphi_4 = 180^0$, $\varphi_6 = 180^0 - \varphi_5$, wozu noch die aus dem Satze C. folgenden Relationen $\varphi_5 = 360^0 - \varphi_3$, $\varphi_6 = 360^0 - \varphi_2$ kommen, so dass also für $\varphi_1 = 0$, $\varphi_3 = 180^0 - \varphi_2$, $\varphi_4 = 180^0$, $\varphi_5 = 180^0 + \varphi_2$, $\varphi_6 = 360^0 - \varphi_2$ ist. Damit wird

$$u = \frac{2ab}{\varrho}[\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi_2 + \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \cos^2\varphi_2]$$

$$= \frac{4ab}{\varrho}[2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \cos^2\varphi_2] = \frac{4ab}{\varrho}[1 - \cos\varphi_2 + \cos^2\varphi_2],$$

und weil auch hier wiederum $\cos\varphi_2 = \frac{1-A}{1+A}$ ist, so erhält man

$$u = \frac{4ab}{\varrho} \cdot \frac{1+3A^2}{(1+A)^2}.$$

Nun ist

$$A = \frac{\varrho^2 b^2}{a^2(b^2 - \varrho^2)} \text{ und } \varrho^2 = a^2 - a^2\frac{(a+b)^2 - b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2},$$

woraus

$$A = \frac{b}{2a+b}$$

folgt. Dies giebt für das in eine Ellipse eingeschriebene Sechseck grössten Umfangs den merkwürdig einfachen Ausdruck:

$$u = 4\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} = 4\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}.$$

Es gelingt nicht, u durch a_1 und b_1 in einfacher Weise auszudrücken, d. h. den Umfang des einer Ellipse eingeschriebenen Sechsecks kleinsten Umfangs zu finden; vielmehr würde dazu die Lösung einer Gleichung des vierten Grades erforderlich sein.

Dagegen lässt sich beim Viereck u sowohl durch a und b, als auch durch a_1 und b_1 darstellen. Für $\varphi_1 = 0$ ist nämlich $\varphi_2 = 90^0$, $\varphi_3 = 180^0$ und $\varphi_4 = 270^0$. Daher hat man

$$u = \frac{2ab}{\varrho}[\sin^2 45 + \sin^2 45 + \sin^2 45 + \sin^2 45] = \frac{4ab}{\varrho}$$

und, weil hier $\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ ist,

$$u = 4\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst $u = 4\sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2 + 2\varrho^2}$; dann aber folgt aus $\varrho^2(a^2 + b^2) = a^2 b^2$, wenn man a und b durch a_1 und b_1 ausdrückt, $\varrho^2 = a_1 b_1$, also ist

$$u = 4(a_1 + b_1).$$

Aus der Gleichung $\varrho^2 = a_1 b_1$ findet man auch noch $a^2 = a_1(a_1 + b_1)$ und $b^2 = b_1(a_1 + b_1)$, wodurch man aus den Axen einer Ellipse, welcher ein Viereck kleinsten Umfangs umgeschrieben ist, die Axen derjenigen Ellipse finden kann, auf welcher die Ecken dieses Vierecks liegen und für welche dasselbe ein Viereck grössten Umfangs ist. Dass Vierecke kleinsten und grössten Umfangs Parallelogramme sein müssen, schliesst man leicht aus Satz C.

Ueber das Viereck hat Steiner (Gesammelte Werke II, 411 flgg.) noch eine Reihe schöner Sätze aufgestellt, deren Beweis aus den von uns entwickelten Formeln sich leicht herleiten lässt.

In eine Ellipse mit den Halbaxen a und b sei ein Viereck grössten Umfangs eingeschrieben; die Gleichungen der in seinen Eckpunkten, welche die Parameter φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 haben, gezogenen Tangenten sind, wenn man berücksichtigt, dass $\varphi_3 = 180^0 + \varphi_1$, $\varphi_4 = 180^0 + \varphi_2$ ist:

$$\begin{aligned} bx\cos\varphi_1 + ay\sin\varphi_1 &= ab, \\ bx\cos\varphi_2 + ay\sin\varphi_2 &= ab, \\ bx\cos\varphi_1 + ay\sin\varphi_1 &= -ab, \\ bx\cos\varphi_2 + ay\sin\varphi_2 &= -ab. \end{aligned}$$

Weil $a_1{}^2 = \frac{a^4}{a^2+b^2}$ und $b_1{}^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}$ ist, so erhält man $\lambda^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$ und $\mu^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}$; setzt man diese Werthe in Gl. 3) ein, so geht dieselbe nach leichter Rechnung über in:

$$a^2\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 + b^2 = 0,$$

woraus in Verbindung mit den oben gegebenen Gleichungen der Tangenten unmittelbar hervorgeht, dass jede derselben auf der folgenden senkrecht steht.

Umgekehrt: Beschreibt man um die Ellipse mit den Halbaxen a und b ein Rechteck, so ist $\varphi_3 = 180^0 + \varphi_1$ und $\varphi_4 = 180^0 + \varphi_2$ und ausserdem ist $a^2\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 + b^2 = 0$; die beiden nach Gl. 3) gebildeten Gleichungen aber heissen hier:

$$\begin{aligned} \lambda^2+\mu^2-1 &= (1-\lambda^2+\mu^2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + (1+\lambda^2-\mu^2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2, \\ -(\lambda^2+\mu^2-1) &= (1-\lambda^2+\mu^2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + (1+\lambda^2-\mu^2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2, \end{aligned}$$

woraus

$$\lambda^2+\mu^2 = 1 \text{ und } (1-\lambda^2+\mu^2) + (1+\lambda^2-\mu^2)\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 = 0$$

oder

$$\frac{1-\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2-\mu^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

folgt; dies giebt aber

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} \text{ und } \mu^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2} \text{ oder } a_1{}^2 = \frac{a^4}{a^2+b^2} \text{ und } b_1{}^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2},$$

was nur dann stattfinden kann, wenn das Viereck der Berührungspunkte ein Viereck grössten Umfangs ist. Man hat daher den Satz:

G. Die Tangenten in den Eckpunkten eines Vierecks von grösstem Umfang bilden ein Rechteck; und umgekehrt: beschreibt man um irgend eine Ellipse ein Rechteck, so sind die Berührungspunkte die Eckpunkte eines derselben eingeschriebenen Vierecks von grösstem Umfang.

Wenn man ferner die Gleichung der Verbindungslinie von φ_1 und φ_2, nämlich:

$$\frac{x}{a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)} + \frac{y}{b}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)} = 1$$

mit der Gleichung der Tangente an die innere Ellipse in dem Punkte x_{12} und y_{12}, nämlich:

$$\frac{x x_{12}}{a^2-\varrho^2}+\frac{y y_{12}}{b^2-\varrho^2}=1$$

vergleicht, so findet man für die Coordinaten des Berührungspunktes:

$$x_{12}=\frac{a^2-\varrho^2}{a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)},\quad y_{12}=\frac{b^2-\varrho^2}{b}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Ist das der äusseren Ellipse eingeschriebene Viereck ein Parallelogramm, so ist $\varphi_3=180^0+\varphi_1$ und $\varphi_4=180^0+\varphi_2$, und man erhält deshalb als Coordinaten der übrigen Berührungspunkte:

$$x_{23}=\frac{a^2-\varrho^2}{a}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)},\qquad y_{23}=\frac{b^2-\varrho^2}{b}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$-x_{34}=\frac{a^2-\varrho^2}{a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)},\quad -y_{34}=\frac{b^2-\varrho^2}{b}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)},$$

$$-x_{41}=\frac{a^2-\varrho^2}{a}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)},\quad -y_{41}=\frac{b^2-\varrho^2}{b}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Man sieht sofort, dass die Verbindungslinien gegenüberliegender Berührungspunkte durch den Mittelpunkt gehen, was übrigens für jedes Vieleck von gerader Seitenzahl gilt.

Wenn man ferner der Kürze halber $\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)=s$ und $\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)=d$ setzt, so erhält man aus diesen Coordinaten die Gleichungen der Normalen in den Berührungspunkten:

$$y=\frac{a}{b}x\,tg s-\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{\sin s}{\cos d},$$

$$y=-\frac{a}{b}x\,cotg s+\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{\cos s}{\sin d},$$

$$y=\frac{a}{b}x\,tg s+\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{\sin s}{\cos d},$$

$$y=-\frac{a}{b}x\,cotg s+\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{\cos s}{\sin d}.$$

Die Diagonalen des von diesen vier Normalen gebildeten Vierecks besitzen die Gleichungen:

$$y=\frac{a}{b}x\,tg\varphi_1 \text{ und } y=\frac{a}{b}x\,tg\varphi_2;$$

denn multiplicirt man die erste Normalengleichung mit $\frac{\cos s}{\sin d}$ und die vierte mit $\frac{\sin s}{\cos d}$ und subtrahirt, so kommt $y=\frac{a}{b}x\,tg(s+d)=\frac{a}{b}x\,tg\varphi_1$; dasselbe Resultat aber erhält man, wenn man die zweite Normalengleichung mit $\frac{\sin s}{\cos d}$ und die dritte mit $\frac{\cos s}{\sin d}$ multiplicirt und dann subtrahirt. Behandelt man in ähnlicher Weise die erste und zweite und die dritte und vierte Normalengleichung, so erscheint die oben angegebene Gleichung der zweiten Diagonale. Aus der Form der Diagonalengleichungen erkennt man, dass die Diagonalen sich im Mittelpunkte schneiden, und aus ihrer Zusammenstellung mit der oben hergeleiteten, für das Viereck geltenden Relation $a^2 \, tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 + b^2 = 0$, dass die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

H. Wenn man daher um eine Ellipse ein Parallelogramm kleinsten Umfangs beschreibt, so bilden die Normalen in den Berührungspunkten eine Raute.

Aber auch der umgekehrte Satz ist giltig. Die Gleichungen der Normalen in den Eckpunkten φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 eines der Ellipse mit den Halbmessern a_1, b_1 eingeschriebenen Parallelogramms sind nämlich:

$$\begin{aligned}
a_1 x \, tg\,\varphi_1 - b_1 y &= (a_1{}^2 - b_1{}^2) \sin\varphi_1, \\
a_1 x \, tg\,\varphi_2 - b_1 y &= (a_1{}^2 - b_1{}^2) \sin\varphi_2, \\
a_1 x \, tg\,\varphi_1 - b_1 y &= -(a_1{}^2 - b_1{}^2) \sin\varphi_1, \\
a_1 x \, tg\,\varphi_2 - b_1 y &= -(a_1{}^2 - b_1{}^2) \sin\varphi_2,
\end{aligned}$$

also die Gleichungen der Diagonalen des durch sie gebildeten Vierecks:

$$\begin{aligned}
a_1 x \, tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - b_1 y \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= 0, \\
a_1 x \, tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + b_1 y \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Sollen dieselben aufeinander senkrecht stehen, so muss $a_1{}^2 \, tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 - b_1{}^2 = 0$ sein. Aus dieser Relation und den Gleichungen der zwei Tangenten in φ_1 und φ_2 müssen φ_1 und φ_2 eliminirt werden, um den Ort des Schnittpunktes dieser letzteren zu erhalten. Erhebt man demgemäss die Gleichungen der Tangenten:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} tg\,\varphi_1 = \sqrt{1 + tg^2\varphi_1}, \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} tg\,\varphi_2 = \sqrt{1 + tg^2\varphi_2}$$

ins Quadrat und subtrahirt, so kommt nach Weghebung des Factors $tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2$:

$$\frac{2xy}{a_1 b_1} + \frac{y^2}{b_1{}^2}(tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2) = tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2;$$

durch Addition der Quadrate aber erhält man:

$$\frac{2x^2}{a_1{}^2} + \frac{2xy}{a_1 b_1}(tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2) + \frac{y^2}{b_1{}^2}(tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2) = 2 + (tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2).$$

Multiplicirt man die erste der zwei letzten Gleichungen mit $tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2$ und zieht sie von der letzten ab, so bleibt:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2}{a_1{}^2} - \frac{y^2}{b_1{}^2}(tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2)^2 + \frac{y^2}{b_1{}^2}(tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2) \\
= 2 + (tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2) - (tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2)^2
\end{aligned}$$

oder reducirt:

$$\left(\frac{x^2}{a_1{}^2} - 1\right) = \left(\frac{y^2}{b_1{}^2} - 1\right) tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 .$$

Dies giebt mit der Relation $a_1{}^2 \, tg^2\varphi_1 \, tg^2\varphi_2 = b_1{}^2$ als Gleichung des Ortes:

$$\left(\frac{x^2}{a_1^2}-1\right)^2=\frac{b_1^2}{a_1^2}\left(\frac{y^2}{b_1^2}-1\right)^2.$$

Zieht man die Wurzel und nimmt das positive Zeichen, so ist

$$\frac{x^2}{a_1^2-a_1 b_1}+\frac{y^2}{b_1^2-a_1 b_1}=1,$$

was eine confocale Hyperbel bedeutet; diese ist aber als Ort unmöglich, weil sich die Tangenten in φ_1 und φ_2 immer ausserhalb der Ellipse schneiden. Bei der Wahl des negativen Zeichens wird aber die Gleichung des Ortes:

$$\frac{x^2}{a_1^2+a_1 b_1}+\frac{y^2}{b_1^2+a_1 b_1}=1,$$

welche genau der erwarteten confocalen Ellipse entspricht. Man kann folglich den Satz aufstellen:

J. Wenn man in eine Ellipse ein Parallelogramm so einschreibt, dass die Normalen in seinen Ecken eine Raute bilden, so erzeugen die Tangenten in seinen Ecken ein Parallelogramm kleinsten Umfangs.

Der Flächeninhalt eines Vielecks kleinsten und grössten Umfangs lässt sich, wenn man die Parameter seiner Ecken, wie gewöhnlich, durch φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 etc., und die Winkel, welche die Radienvectoren ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 etc. nach den Ecken mit der Abscissenaxe bilden, durch ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 etc. bezeichnet, so dass $tg\,\vartheta_1=\frac{b}{a}\,tg\,\varphi_1$ etc., ausdrücken durch:

$$2F=\varrho_1\varrho_2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)+\varrho_2\varrho_3\sin(\vartheta_3-\vartheta_1)+\text{etc.}$$

Es ist nun

$$\varrho_1\varrho_2=\sqrt{(a^2\cos^2\varphi_1+b^2\sin^2\varphi_1)(a^2\cos^2\varphi_2+b^2\sin^2\varphi_2)}$$

$$=a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}tg^2\varphi_1\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}tg^2\varphi_2\right)}$$

oder

$$\varrho_1\varrho_2=a^2\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2},$$

also

$$\varrho_1\varrho_2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)=a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2(tg\,\vartheta_2-tg\,\vartheta_1)$$

$$=a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\frac{b}{a}(tg\,\varphi_2-tg\,\varphi_1)=ab\sin(\varphi_2-\varphi_1);$$

folglich:

$$17)\quad 2F=ab\,[\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_4-\varphi_3)+\cdots].$$

Für das Viereck erhält man hieraus:

$$F_4=2ab\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

Wir wollen nun mit Hinzunahme der für das Viereck geltenden Relation $a^2\,tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2+b^2=0$ untersuchen, wann $\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ ein Maximum oder Minimum ist. Durch partielle Differentiation erhält man nach der Factorenmethode die beiden Bedingungsgleichungen:

$$-\cos(\varphi_2-\varphi_1)+q\cdot\frac{tg\,\varphi_2}{\cos^2\varphi_1}=0 \text{ und } \cos(\varphi_2-\varphi_1)+q\cdot\frac{tg\,\varphi_1}{\cos^2\varphi_2}=0,$$

d. h.

$$\sin 2\varphi_1+\sin 2\varphi_2=0 \text{ oder } \sin(\varphi_2+\varphi_1)\cos(\varphi_2-\varphi_1)=0.$$

Nimmt man zuerst $\varphi_1+\varphi_2=180^0$, so sind die Seiten des Parallelogramms den Halbaxen der Ellipse parallel. Dann folgt aber noch $tg\,\varphi_1=\frac{b}{a}$ und $tg\,\varphi_2=-\frac{b}{a}$, woraus wir schliessen, dass $tg(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{-2ab}{a^2-b^2}$ und $\sin(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, also $F_4=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=4a_1b_1$ ist, und dies ist das Minimum von F_4. Setzt man dagegen $\varphi_2-\varphi_1=90^0$, so muss $\varphi_1=0$ und $\varphi_2=90^0$ sein, oder das Parallelogramm wird durch die Verbindungslinien der Endpunkte der Axen gebildet; dann ist aber $\sin(\varphi_2-\varphi_1)=1$ und $F_4=2ab=2(a_1+b_1)\sqrt{a_1b_1}$ und dies ist das Maximum von F_4.

Andererseits ist der Flächeninhalt des um die äussere Ellipse durch die Punkte φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 beschriebenen Rechtecks

$$R=2\varrho_1\sin(\varepsilon_1-\vartheta_1).2\varrho_2\sin(\varepsilon_2-\vartheta_2),$$

wo ε_1 und ε_2 die Winkel bezeichnen, welche die Normalen in φ_1 und φ_2 mit der Abscissenaxe machen. Weil nun $\varrho_1\varrho_2=a^2\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}$ ist, so hat man:

$$R=4a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2\,(tg\,\varepsilon_1-tg\,\vartheta_1)(tg\,\varepsilon_2-tg\,\vartheta_2),$$

und weil $\varepsilon_2=90^0+\varepsilon_1$, also $\sin(\varepsilon_2-\varepsilon_1)=1$, folglich $tg\,\varepsilon_2-tg\,\varepsilon_1=\frac{1}{\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2}$ ist, so erhält man jetzt:

$$R=4a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\,\frac{(tg\,\varepsilon_1-tg\,\vartheta_1)(tg\,\varepsilon_2-tg\,\vartheta_2)}{tg\,\varepsilon_2-tg\,\varepsilon_1}.$$

Nun ist aber

$$tg\,\varepsilon_1=-\frac{b}{a}\cotg\varphi_1,\quad tg\,\varepsilon_2=-\frac{b}{a}\cotg\varphi_2,\quad tg\,\vartheta_1=\frac{b}{a}\,tg\,\varphi_1,\quad tg\,\vartheta_2=\frac{b}{a}\,tg\,\varphi_2,$$

daher bekommt man endlich

$$R=4a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{(\cotg\varphi_1+tg\,\varphi_1)(\cotg\varphi_2+tg\,\varphi_2)}{\cotg\varphi_1-\cotg\varphi_2}=\frac{4ab}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)};$$

durch Multiplication mit der oben erhaltenen Gleichung $F_4=2ab\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ entspringt:

$$R.F_4=8a^2b^2,$$

wie Steiner a. a. O. S. 413 behauptet. Dem Minimum des Parallelogramms entspricht demgemäss das Maximum des Rechtecks und umgekehrt.

Steiner giebt a. a. O. S. 413 noch einen Satz über das Parallelogramm und Rechteck, den wir hier etwas verkürzt folgen lassen, um ihn dann analytisch zu verificiren.

K. Die vier Ecken jedes der genannten Rechtecke liegen mit den beiden Brennpunkten der Ellipse in einer gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}$, welche mit der Ellipse concentrisch ist; und ebenso liegen die Ecken des Parallelogramms mit den Brennpunkten der Ellipse in einer andern gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}'$, welche mit $\mathfrak{H}$ die Strecke zwischen den beiden Brennpunkten als Durchmesser gemein hat. Die Hauptaxen dieser beiden zusammengehörigen gleichseitigen Hyperbeln $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ bilden einen constanten Winkel von 45^0 und zudem ist die Summe der Biquadrate dieser Axen constant und zwar dem Biquadrate jenes gemeinschaftlichen Durchmessers gleich. Die auf diese Weise bestimmten zwei Schaaren gleichseitiger Hyperbeln sind im Ganzen nur eine und dieselbe Schaar und als solche einfach dadurch bestimmt, dass sie die Strecke zwischen den Brennpunkten als Durchmesser gemein haben. Ihre Tangenten in den Scheiteln ihrer Hauptaxen berühren sämmtlich diejenige unter ihnen, welche die grösste Axe, nämlich eben jenen gemeinschaftlichen Durchmesser zur Hauptaxe hat. Daher liegen die Hauptscheitel aller dieser Hyperbeln in einer Lemniskate, welche concentrisch ist mit der Ellipse und die Strecke zwischen den Brennpunkten zur Hauptaxe hat.

Um dies zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass die Gleichung einer Schaar durch die Brennpunkte gehender gleichseitiger Hyperbeln die Form haben muss:

$$x^2-y^2+2Bxy=a^2-b^2.$$

Damit eine Hyperbel der Schaar vollständig bestimmt sei, muss noch einer ihrer Punkte gegeben sein, wozu wir den Schnittpunkt der in φ_1 und φ_2 gelegten Tangenten nehmen, welcher die Coordinaten

$$x=a\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)} \quad \text{und} \quad y=b\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}$$

hat. Die Substitution dieser Werthe ergiebt:

$$a^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)-b^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+2abB\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)$$
$$=(a^2-b^2)\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$$

oder nach Verwandlung der Functionen der halben Winkel in solche der ganzen:

$$a^2[\cos(\varphi_2+\varphi_1)-\cos(\varphi_2-\varphi_1)]+b^2[\cos(\varphi_2+\varphi_1)+\cos(\varphi_2-\varphi_1)]$$
$$=-2abB\sin(\varphi_2+\varphi_1),$$

was nach leichter Reduction übergeht in

$$b^2-a^2\,tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2=-abB\,(tg\,\varphi_1+tg\,\varphi_2).$$

Die nämliche Endgleichung hätte man aber auch erhalten, wenn man den Schnittpunkt der in φ_2 und φ_3 gelegten Tangenten auf die Hyperbel hätte fallen lassen, weil ja $\varphi_3 = 180^0 + \varphi_1$ ist; und ebenso verhält es sich mit den beiden anderen Schnittpunkten. Daher ist

$$B = -\frac{b^2 - a^2\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2}{a\,b\,(tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2)}.$$

Um diesen Ausdruck nur von dem Parameter φ_1 abhängig zu machen, multiplicire man auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit $tg\,\varphi_1$ und wende die Relation $a^2\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 + b^2 = 0$ an, wodurch

$$B = -\frac{2\,a\,b\; tg\,\varphi_1}{a^2\, tg^2\,\varphi_1 - b^2}$$

sich ergiebt und man in den Stand gesetzt wird, zu jedem φ_1 die zugehörige, durch die Brennpunkte und die Ecken des Rechtecks gehende Hyperbel $\mathfrak{H}$ zu construiren.

Substituiren wir in ähnlicher Weise in die Gleichung

$$x^2 - y^2 + 2\,B'xy = a^2 - b^2$$

die Coordinaten von φ_1, nämlich $x = a\,cos\,\varphi_1$ und $y = b\,sin\,\varphi_1$, so erhält man

$$B' = \frac{a^2\, tg^2\,\varphi_1 - b^2}{2\,a\,b\; tg\,\varphi_1};$$

die Substitution von $x = a\,cos\,\varphi_2$ und $y = b\,sin\,\varphi_2$ hätte das Resultat $\frac{a^2\, tg^2\,\varphi_2 - b^2}{2\,a\,b\; tg\,\varphi_2}$ geliefert, das mit jenem eben erhaltenen identisch ist, weil die Relation $a^2\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 + b^2$ sich auch schreiben lässt:

$$\frac{a^2\, tg^2\,\varphi_1 - b^2}{tg\,\varphi_1} = \frac{a^2\, tg^2\,\varphi_2 - b^2}{tg\,\varphi_2};$$

wegen $\varphi_3 = 180^0 + \varphi_1$ und $\varphi_4 = 180^0 + \varphi_2$ verhält es sich ebenso mit den übrigen zwei Eckpunkten des Parallelogramms.

Für ein gegebenes φ_1 findet man also eine zweite Hyperbel $\mathfrak{H}'$ aus der Schaar der durch die Brennpunkte gehenden Hyperbeln, welche durch die Eckpunkte des Parallelogramms grössten Umfangs geht. Da beide Hyperbeln $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ derselben Schaar durch die Brennpunkte gehender Hyperbeln angehören und denselben Mittelpunkt wie die gegebene Ellipse haben, so ist ihnen auch derjenige Durchmesser gemeinschaftlich, der durch die Brennpunkte begrenzt wird.

Die Länge A der Halbaxe der Hyperbel $\mathfrak{H}$ findet man nach den gewöhnlichen Regeln durch die Gleichung

$$A^4 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{1 + B^2};$$

ebenso ist für die Länge A' der Halbaxe der Hyperbel $\mathfrak{H}'$:

$$A'^4 = \frac{(a^2-b^2)^2}{1+B'^2}.$$

Weil aber, wie man leicht findet, $BB'+1=0$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$A'^4 = \frac{(a^2-b^2)^2 B^2}{1+B^2},$$

woraus sofort die von Steiner angegebene Relation $A^4+A'^4=(a^2-b^2)^2$ folgt.

Ferner ist die Gleichung der Hauptaxe der Hyperbel $\mathfrak{H}$:

$$By = (-1+\sqrt{1+B^2})\,x,$$

folglich die der Hyperbel $\mathfrak{H}'$:

$$y = (B-\sqrt{1+B^2})\,x;$$

die Tangente des Winkels beider Axen ist also gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{-1+\sqrt{1+B^2}-B(B-\sqrt{1+B^2})}{B+(-1+\sqrt{1+B^2})(B-\sqrt{1+B^2})},$$

dessen Werth sich bei der Entwickelung gleich 1 ergiebt; daher machen die Hauptaxen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ den constanten Winkel 45^0.

Die Gleichung einer Tangente an eine Hyperbel der Schaar im Punkte x_1, y_1 hat die Form:

$$x(x_1+By_1)+y(Bx_1-y_1)=a^2-b^2;$$

damit dieselbe Scheiteltangente sei, müssen die Coordinaten x_1 und y_1 erstens der Gleichung der Curve genügen, was man in folgender Weise ausdrücken kann:

$$x_1(x_1+By_1)+y_1(Bx_1-y_1)=a^2-b^2,$$

und zweitens der Gleichung der Hauptaxe, welche in rationalisirter Gestalt heisst:

$$x_1(Bx_1-y_1)-y_1(x_1+By_1)=0.$$

Um diese Gleichungen zur Rechnung bequemer zu machen, setzen wir

$$Bx_1-y_1=p \quad \text{und} \quad x_1+By_1=q,$$

woraus wir durch Elimination von B die neue Relation

$$qx_1-py_1={x_1}^2+{y_1}^2$$

erhalten, während die erhaltenen drei Gleichungen übergehen in:

$$qx+py=a^2-b^2, \quad qx_1+py_1=a^2-b^2, \quad px_1-qy_1=0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergeben sich die Werthe:

$$x_1=\frac{q}{p^2+q^2}(a^2-b^2) \quad \text{und} \quad y_1=\frac{p^2}{p^2+q^2}(a^2-b^2),$$

durch deren Substitution obige Relation sich in

$$q^2-p^2=a^2-b^2$$

verwandelt. Sucht man daher die Enveloppe der geraden Linie $qx+py = a^2-b^2$, zwischen deren Coefficienten die Relation $q^2-p^2=a^2-b^2$ besteht, so findet man dafür die Gleichung:

$$x^2-y^2=a^2-b^2,$$

wodurch die letzte der Behauptungen Steiner's in ihrem ersten Theile erwiesen ist. Um auch die Richtigkeit des zweiten darzuthun, hat man aus der Gleichung der Curve

$$x^2-y^2+2Bxy=a^2-b^2$$

und der rationalisirten Gleichung der Hauptaxe

$$B(x^2-y^2)=2xy$$

den Parameter B zu eliminiren, wovon das Resultat ist:

$$(x^2+y^2)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2),$$

d. h. die Gleichung einer Lemniskate, welche die angegebenen Eigenschaften besitzt. Die von Steiner a. a. O. formulirten Umkehrungen ergeben sich aus dem Mitgetheilten von selbst.

Bensheim, 2. September 1887.