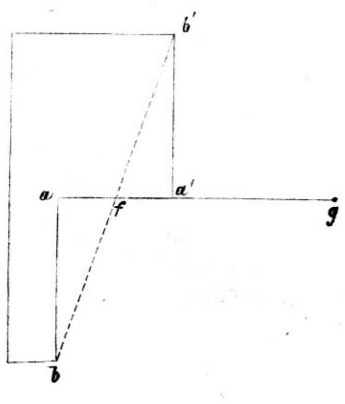
Stoll, F.X. (1876): Mathematisch-physikalische Miscellen, Zweite Folge, In: Programm des Grossherzoglichen Gymnasiums zu Bensheim für das Schuljahr 1875 - 1876, Darmstadt, 1876.

Mathematisch-physikalische Miscellen II.

Theorie des Horizontalpendels.

Herr F. Zöllner hat in seiner Abhandlung «über den Ursprung des Erdmagnetismus und der magnetischen Beziehungen der Weltkörper» (Berichte der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. S. 479—575, auszugsweise in Poggendorff's Annalen, Bd. 150, S. 134 ff.) über ein im Jahre 1830 von Lorenz Hengler in München erfundenes und im 43. Bande von Dingler's Polytechn. Journal (Jahrgang 1832) S. 81—92 beschriebenes Instrument zum Messen «jeder auch noch so geringen Kraft, welche nicht in paralleler Richtung mit der Schwere wirkt», welches mittlerweile gänzlich in Vergessenheit gerathen war, Nachricht gegeben. Weil er dasselbe wirklich zu dem bezeichneten Zwecke sehr dienlich fand, liess er es construiren und stellte damit Beobachtungen an, welche die Möglichkeit darthaten, mit demselben die Massen und Entfernungen des Mondes und der Sonne direct zu bestimmen und noch vielerlei andere feine Messungen vorzunehmen; es ergab sich dabei freilich, dass das Instrument von zufälligen Störungen, wie Erschütterungen des Erdbodens, Luftzug u. dgl. so sehr beeinflusst wird, dass nur die Aufstellung in einem tiefen Erdschachte und hermetischer Verschluss einige Garantie für zuverlässige Resultate geben kann; demzufolge ist dasselbe in dem 80—100 Fuss tiefen Brunnenschacht des neuen Observatoriums zu Potsdam untergebracht worden (vgl. Klein Vierteljahrs-Revüe der Naturwissenschaften, Jahrgang 1875, Heft I., S. 2).

Das Instrument besteht aus einer an 2 gleichlangen, in der Gleichgewichtslage vertikalen Fäden ab und $a'b'$ (siehe nebenstehende Figur) derart horizontal aufgehängten Stange, dass der eine Faden



ab das eine Ende a der Stange mit einem festen Punkte b des Erdbodens oder Stativs verbindet, während der andere Faden $a'b'$ von einem nahe an demselben Endpunkt der Stange liegenden Punkt a' derselben zu einem über derselben befindlichen festen Punkte b' hingeht. Da der Schwerpunkt der Stange in der Figur rechts von a' bei g liegt, so wird jede horizontale Kraft dieselbe aus ihrer Gleichgewichtslage ablenken können, sobald nur die Empfindlichkeit des Instruments gross genug ist, eine Bedingung, die leicht durch Verkleinerung der Distanz aa' erreicht werden kann. Das Instrument macht dann Schwingungen in horizontaler Richtung, welche, wie wir sehen werden, demselben Gesetze folgen, wie die in vertikaler Ebene stattfindenden Schwingungen eines gewöhnlichen Pendels, und führt deshalb mit Recht den Namen Horizontalpendel; die Cavendish'sche Drehwage, welche ihm ähnlich zu sein scheint, unterscheidet sich dadurch, dass sie einen gleicharmigen Hebel bildet, dessen beide mit schweren Kugeln versehene Endpunkte von einer aus grosser Entfernung wirkenden Kraft gleich stark angezogen werden, so dass die dadurch bewirkten entgegengesetzten Drehungen sich aufheben, während bei dem Horizontalpendel nur ein Arm vorhanden ist, welcher jeder aus beliebiger Entfernung wirkenden Kraft gehorcht.

Wegen der Kleinheit der zu messenden Kräfte wird das Instrument unter dem Einflusse derselben nur sehr kleine Ablenkungen von seiner Gleichgewichtslage erfahren; wir werden daher auch nur kleine Ablenkungen und Schwingungen zu betrachten haben. Unter dieser Voraussetzung aber ist leicht einzusehen, dass diese Schwingungen stattfinden werden, als bewege sich das ganze bewegliche System um die Momentanaxe bb'. In der That werden die Fäden ab und $a'b'$, wenn sie nur lang genug sind, nur äusserst wenig vom Parallelismus abweichen und zwar um so weniger, je kleiner die Schwingungen sind; der Faden ab beschreibt dann einen Kegelmantel, dessen Axe bb' ist und dessen Spitze in b liegt, dieselbe Axe hat der von dem Faden $a'b'$ beschriebene Kegelmantel mit der Spitze in b'. Der Mittelpunkt der Strecke aa' wird fortwährend in denselben Punkt f des Raumes fallen und die Pendelstange den Mantel eines dritten Kegels beschreiben, der seine Spitze in diesem Punkte hat und dessen Axe ebenfalls bb' ist. Fällt man von dem Schwerpunkte g der Pendelstange eine Senkrechte gg' auf die Drehaxe bb', so beschreibt dieselbe bei der Drehung einen Kreis, welcher als Durchschnitt einer durch g gehenden, auf bb' senkrecht stehenden Ebene mit dem Kegel, den die Pendelstange beschreibt, betrachtet werden kann. Daraus geht aber hervor, dass sich bei einer Abweichung aus der anfänglichen Lage der Schwerpunkt jedesmal hebt, dass letztere also wirklich eine stabile Gleichgewichtslage ist, zu der das Pendel nach jeder Störung zurückzukehren strebt.

Wir wollen jetzt die Kraft suchen, mit der diese Rückkehr geschieht. Nimmt man den Punkt f zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinate, betrachtet fg als Axe der x, die Vertikale durch f als Axe der z und die auf beiden Geraden senkrecht stehende durch f gehende Linie als Axe der y, bezeichnet man ferner den Winkel, den die Axe der z mit der Drehaxe bb' bildet, mit φ, so ist die Gleichung des von fg beschriebenen Kegels:

$$(x \sin\varphi + z \cos\varphi)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2\varphi. \tag{1}$$

Es kommt nun vor Allem darauf an, für irgend einen Drehungswinkel α der Horizontalprojection der aus ihrer Gleichgewichtslage gebrachten Pendelstange das z des Schwerpunktes g zu kennen. Zu diesem Behufe beschreibe man um f als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius $fg = r$, deren Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{2}$$

ist und lege durch die Axe der z eine Ebene, welche gegen die xz Ebene um den Winkel α geneigt ist, die also

$$y = x \operatorname{tg} \alpha \tag{3}$$

zur Gleichung hat; dann muss man aus diesen Gleichungen x und y eliminiren, um den verlangten Werth von z zu erhalten. Die Gleichungen (1) und (2) geben vorerst:

$$(x \sin\varphi + z \cos\varphi)^2 = r^2 \sin^2\varphi,$$

woraus

$$x \sin\varphi + z \cos\varphi = \pm r \sin\varphi \tag{4}$$

folgt, wo nur das obere Zeichen genommen werden darf, weil sich das untere auf den Scheitelkegel bezieht, der mit dem betrachteten dieselbe Axe und Spitze hat, dessen Seitenlinien aber die Verlängerungen der Seitenlinien des betrachteten sind. Aus den Gleichungen (2) und (3) aber folgt:

$$x^2 = (r^2 - z^2) \cos^2\alpha,$$

und dadurch geht die Gleichung (4) über in:

$$(r^2 - z^2)\cos^2\alpha \sin^2\varphi = (r\sin\varphi - z\cos\varphi)^2$$

oder in anderer Form:

$$\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)\cos^2\alpha \,\mathrm{tg}^2\varphi = \left(\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{z}{r}\right)^2.$$

Berücksichtigt man nun, dass $\frac{z}{r}$ eine sehr kleine Grösse ist, wenn der Voraussetzung gemäss α sehr klein ist, so kann man $\frac{z^2}{r^2}$ gegen 1 vernachlässigen, und man erhält dann durch Wurzelausziehung unmittelbar

$$\cos\alpha \,\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{z}{r}$$

oder

$$z = r\,\mathrm{tg}\,\varphi\,.\,(1 - \cos\alpha) = 2r\,\mathrm{tg}\,\varphi \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha. \tag{5}$$

Hätte man bei der Wurzelausziehung das entgegengesetzte Zeichen genommen, also gesetzt

$$\cos\alpha \,\mathrm{tg}\,\varphi = -\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{z}{r},$$

so würde man

$$z = r\,\mathrm{tg}\,\varphi\,.\,(1 + \cos\alpha) = 2r\,\mathrm{tg}\,\varphi \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

erhalten haben, einen Werth, der für einen auf der Verlängerung von fg nach der entgegengesetzten Seite von f liegenden, um fg von g abstehenden Punkt gültig ist.

Die Arbeit welche verrichtet wird, indem sich der Schwerpunkt g, in welchem das Gewicht des Pendels $= P$ vereinigt gedacht werden kann, um die unendlich kleine Grösse dz hebt, ist gleich Pdz. Den Werth von dz erhält man aber durch Differentiation der Gleichung (5) nach α; man bekommt so:

$$Pdz = Pr\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi\,.\,\sin\alpha\, d\alpha. \tag{6}$$

Nennt man nun Q die horizontale Kraft, welche, in der Entfernung 1 von f nach rechts hin senkrecht auf fg angebracht, letzteres zu drehen strebt, d. h. das Drehungsmoment, so ist die zur Drehung aufgewendete Arbeit gleich $Qd\alpha$. Durch Gleichsetzung beider Arbeiten erhält man:

$$Q = Pr\,\mathrm{tg}\,\varphi \sin\alpha. \tag{7}$$

Ist die wirkende Kraft eine solche, die von einem fernen Punkte ausgeht, z. B. vom Monde, so kann man sich die Gesammtwirkung derselben im Schwerpunkte g vereinigt denken, d. h. man muss den Angriffspunkt der Kraft nach g und nicht in die Einheit der Entfernung von f verlegen. Die Kraft hat dann zum Ausdruck:

$$P\,\mathrm{tg}\,\varphi\,.\,\sin\alpha,$$

oder, weil $P = mg$, wo m die im Schwerpunkt vereinigte Masse des Pendels und g die Beschleunigung der Schwere ist:

$$mg\,\mathrm{tg}\,\varphi \sin\alpha.$$

Die Kraft, welche auf die Einheit der Masse wirkt, ist dann also:

$$g\,\mathrm{tg}\,\varphi \sin\alpha. \tag{8}$$

Da in den Anwendungen φ sehr klein ist, so kann, wie aus diesem Ausdrucke folgt, ein verhältnissmässig bedeutender Ausschlagwinkel α durch eine sehr kleine Kraft $g\,\mathrm{tg}\,\varphi$ hervorgebracht werden. Durch geeignete Vorrichtungen kann man es in die Hand bekommen, den Werth von φ beliebig zu ändern und so die Empfindlichkeit des Instruments zu steigern oder zu vermindern. Eine solche Vorrichtung ist die Stellschraube d in Zöllner's Abhandlung bei Poggendorff, S. 135, Fig. 6 der Tafel I., von der Zöllner ausdrücklich sagt, dass sie «möglichst in der durch beide Aufhängepunkte b und b' gelegten Vertikalebene stehen muss», was sich aus der Bedeutung und dem von uns entwickelten Einfluss der Grösse φ augenblicklich als nothwendig ergibt.

Die beschleunigende Kraft des Horizontalpendels unterscheidet sich von derjenigen des Vertikalpendels nur durch den Factor $\mathrm{tg}\,\varphi$; es gilt daher auch für dasselbe die Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g \operatorname{tg} \varphi}}, \tag{9}$$

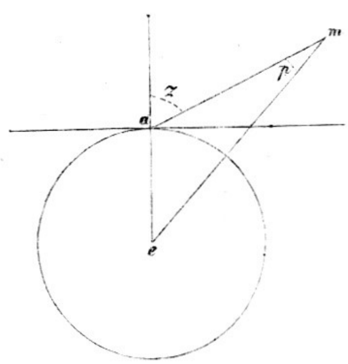
wo man für l die Entfernung des Schwingungspunktes vom Punkte f zu nehmen hat.

Eine elementare Herleitung der vorstehenden Resultate, welche ich meinem Collegen, Herrn Professor P. Reis, mitgetheilt habe, hat derselbe in die dritte Auflage seines Lehrbuchs der Physik aufgenommen (S. 636).

Ueber die durch den Mond und die Sonne bewirkte Ablenkung des Pendels von der Lothlinie.

Um eine Vorstellung zu bekommen, welche Empfindlichkeit das Horizontalpendel haben muss, um direct von der Anziehungskraft des Mondes und der Sonne abgelenkt zu werdeu, hat Zöllner a. a. O. die Angaben von Peters in dessen Schrift: «Von den kleinen Ablenkungen der Lothlinie und des Niveaus, welche durch Anziehung der Sonne, des Mondes und einiger terrestrischer Gegenstände hervorgebracht werden (Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Acad. Imp. des sciences de St. Petersbourg, T. III. Nr. 14, Petersbourg 1844)» benutzt; die mittlere Ablenkung, welche der Mond in günstiger Lage auf ein Vertikalpendel hervorbringen kann, beträgt nach Peters 0,″0174; diejenige, welche die Sonne unter gleichen Umständen erzeugt, 0″,0080.

Da mir die Abhandlung von Peters nicht zu Gebote stand, so habe ich versucht, in dem Folgenden diese Grössen selbständig abzuleiten. In der nebenstehenden Figur bedeute der Kreis einen grössten Kreis der Erde, e den Mittelpunkt derselben, m den Mittelpunkt des Mondes, $em = d$ die Entfernung beider Mittelpunkte, in Einheiten des Erdhalbmessers ea ausgedrückt, $am = x$ die Entfernung des Mondmittelpunktes von dem Orte, wo das Pendel aufgehängt ist, z die Zenithdistanz des Mondes, $\sphericalangle ame = p$ die Höhenparallaxe, μ die Masse desselben. Die Kraft W, welche das Pendel in a ablenkt, ist dann gleich der Differenz der horizontalen Composanten der auf den Punkt a und den Punkt e wirksamen Anziehungskräfte des Mondes, also:



$$W = \frac{\mu}{x^2} \sin z - \frac{\mu}{d^2} \sin (z - p)$$

oder, weil $d \sin (z - p) = x \sin z$ ist,

$$W = \frac{\mu}{d^2} \cdot \frac{\sin^3 z - \sin^3 (z - p)}{\sin^2 (z - p)}. \tag{1}$$

Es fragt sich nun, unter welchen Umständen ist dieser Ausdruck ein Maximum? Um diese Frage zu beantworten, beachte man vorerst, dass p immer eine sehr kleine Grösse ist, dass man folglich mit ziemlicher Annäherung $\sin (z - p) = \sin z - p \cos z$ setzen darf. Dadurch erhält der obige Ausdruck die Form:

$$W = \frac{\mu}{d^2} \cdot \frac{\sin^3 z - (\sin z - p \cos z)^3}{(\sin z - p \cos z)^2},$$

oder, wenn man im Zähler bei der Entwickelung nur die erste Potenz von p beibehält, im Nenner aber auch diese vernachlässigt, was für eine erste Annäherung erlaubt ist,

$$W = \frac{\mu}{d^2} \cdot 3 p \cos z.$$

Bezeichnet man nun mit P die Horizontalparallaxe des Mondes, so ist bekanntlich $p = P \sin z$ und annähernd $P = \frac{1}{d}$. Dadurch erhält man aus dem letzterem Ausdrucke für W:

$$W = 3\,\mu\,P^3 \sin z \cos z = \frac{3\,\mu\,P^3 \sin 2\,z}{2}. \tag{2}$$

Aus dieser Form für W erkennt man augenblicklich, dass abwechselnd ein Maximum oder Minimum stattfindet für $z = 45^0$, $z = 135^0$, $z = 225^0$, $z = 315^0$, die z vom Zenith aus nach Osten gerechnet, wodurch W den Werth $\pm \frac{3\,\mu\,P^3}{2}$ bekommt; zugleich geht daraus hervor, dass $W = 0$ wird für $z = 0$, $z = 90^0$, $z = 180^0$, $z = 270^0$. Das Pendel ist also beim Aufgang des Mondes in seiner Gleichgewichtslage, weicht dann nach Osten ab und erreicht 3 Stunden später seine grösste östliche Elongation. Dann kehrt es in seine Gleichgewichtslage zurück und erreicht dieselbe 6 Stunden nach dem Aufgange des Mondes, um nun nach Westen abzuweichen. Die grösste westliche Elongation ist 9 Stunden nach dem Aufgang. Von da an geht das Pendel wieder nach Osten, passirt 12 Stunden nach dem Aufgange seine Gleichgewichtslage und erreicht 15 Stunden nach dem Aufgange seine grösste östliche Elongation, um dann wiederum den Rückweg nach Westen anzutreten. 18 Stunden nach dem Aufgange ist das Pendel wieder in seiner Gleichgewichtslage angekommen und 21 Stunden nach dem Aufgange in seiner grössten westlichen Elongation. Jetzt beginnt es wieder die Bewegung nach Osten und trifft 24 Stunden nach dem Aufgange wieder in seiner Gleichgewichtslage ein. Nunmehr beginnt der ganze Cyclus der Bewegungen des Pendels von Neuem.

Um die Grösse der Maximalablenkung des Pendels kennen zu lernen, dividire man den Ausdruck für die grösste ablenkende Kraft, nämlich $\frac{3\,\mu\,P^3}{2}$ durch die Masse M der Erde; man erhält dann die Tangente des Ablenkungswinkels:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\,\mu\,P^3}{2\,M}. \tag{3}$$

Nimmt man die mittlere Horizontalparallaxe des Mondes zu 57′, 2″,2 und die Masse desselben zu $\frac{1}{81}$ der Erdmasse an, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\,.\,0{,}0165913^3}{162}$, also $\alpha = 0''{,}01744$, d. h. genau der von Peters angegebene Werth; bei Zugrundlegung der Hansen'schen Mondmasse $= \frac{1}{79{,}667}$ erhält man $\alpha = 0''{,}0177$. Um die von der Sonne bewirkte Ablenkung zu finden, hat man M gleich der Masse der Erde $= 1$, μ gleich der Masse der Sonne $= 355500$ und $P = 8''{,}571$ (Encke'scher Werth) zu setzen; man erhält dann $\alpha = 0''{,}00807$, also wiederum fast genau die von Peters berechnete Maximalablenkung. Mit dem neuesten wahrscheinlichsten Werth der Sonnenparallaxe 8″,878 erhält man $\alpha = 0''{,}00897$.

Der Maximalwerth der Ablenkung wird nicht merklich anders gefunden werden, wenn man die Annäherung noch weiter treibt, wohl aber der Zeitpunkt seines Eintritts, bezüglich die Zenithdistanz z, wenigstens bei dem Monde, dessen Horizontalparallaxe ziemlich beträchtlich ist. Um diese Zenithdistanz genauer zu finden, wollen wir die rechte Seite der Gleichung (1) mit Hülfe des Maclaurin'schen Satzes nach Potenzen von p bis zur zweiten inclusive entwickeln, indem wir dieselbe als blosse Function von p betrachten; wir erhalten so:

$$W = \frac{3\,p\,\mu}{2\,d^2}\left[2 \cos z + \frac{p}{\sin z}(\sin^2 z + 2 \cos^2 z)\right],$$

und wenn wir wiederum beachten, dass $p = P \sin z$ und $Pd = 1$ ist:

$$W = \frac{3\,P^3 \mu \sin z}{2}\left[2 \cos z + P(\sin^2 z + 2 \cos^2 z)\right] = \frac{3\,P^3 \mu \sin 2\,z}{2}\left[1 + \frac{1}{2} P \cdot \frac{1 + \cos^2 z}{\cos z}\right]. \tag{4}$$

Dieser Ausdruck ist nun nach z zu differentiiren und $dW = 0$ zu setzen. Man gibt dabei der zu differentiirenden Grösse am besten die Form:

$$2 \sin z \cos z + P \sin z (1 + \cos^2 z)$$

und erhält als Bedingungsgleichung des Maximums, bezüglich Minimums:

$$3 P \cos^3 z + 4 \cos^2 z - P \cos z - 2 = 0.$$

Diese Gleichung hat 3 reelle Wurzeln, von denen aber eine < -1, also unbrauchbar ist. Die beiden andern findet man mit grosser Annäherung, wenn man überlegt, dass oben schon annäherungsweise $\cos z = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ gefunden wurde, woraus $3 P \cos^3 z = \frac{3}{2} P \cos z$ folgt; dadurch geht nämlich obige Gleichung über in die quadratische Gleichung:

$$4 \cos^2 z + \frac{1}{2} P \cos z - 2 = 0.$$

Daraus findet man:

$$\cos z = -\frac{1}{16} P \pm \sqrt{\frac{P^2}{16^2} + \frac{1}{2}},$$

oder mit Vernachlässigung des Quadrates von $\frac{P}{16}$:

$$\cos z = -\frac{1}{16} P \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Man gebe dem z in dieser Gleichung nacheinander die Werthe $\frac{\pi}{4} + \delta_1$, $\frac{3\pi}{4} + \delta_2$, $\frac{5\pi}{4} + \delta_3$, $\frac{7\pi}{4} + \delta_4$, wo δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 sehr kleine Grössen sind und entwickele unter Berücksichtigung dieses Umstandes $\cos z$, so erhalten die δ nacheinander die Werthe:

$$\delta_1 = + \frac{P\sqrt{2}}{16},$$

$$\delta_2 = + \frac{P\sqrt{2}}{16},$$

$$\delta_3 = - \frac{P\sqrt{2}}{16},$$

$$\delta_4 = - \frac{P\sqrt{2}}{16};$$

Der Bogen z hat demnach vier Werthe, nämlich, durch Indices unterschieden:

$$z_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{P\sqrt{2}}{16},$$

$$z_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{P\sqrt{2}}{16},$$

$$z_3 = \frac{5\pi}{4} - \frac{P\sqrt{2}}{16},$$

$$z_4 = \frac{7\pi}{4} - \frac{P\sqrt{2}}{16},$$

denen in derselben Reihenfolge ein Maximum, Minimum, Maximum, Minimum entspricht. Es ist dabei übrigens wohl zu beachten, dass die z vom Zenith aus nach Osten hin wachsen. Der Bogen $\frac{P\sqrt{2}}{16}$

beträgt für den Mond, in Gradmass ausgedrückt 5′, 2″, 5; für die Sonne beträgt er ungefähr $\frac{2}{3}$ Secunden, ist also kaum merklich. Die Grössen der Ablenkung selbst für die 4 Fälle kann man mit demselben Grade der Annäherung erhalten, wenn man in der Formel (4), nachdem man sie durch M dividirt hat, nacheinander $\sin 2z = +1$ und $\cos z = +\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sin 2z = -1$ und $\cos z = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sin 2z = +1$ und $\cos z = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sin 2z = -1$ und $\cos z = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ setzt. Man bekommt so der Reihe nach:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = + \frac{3P^3\mu}{2M}\left(1 + \frac{3}{4}P\sqrt{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = - \frac{3P^3\mu}{2M}\left(1 - \frac{3}{4}P\sqrt{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = + \frac{3P^3\mu}{2M}\left(1 - \frac{3}{4}P\sqrt{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = - \frac{3P^3\mu}{2M}\left(1 + \frac{3}{4}P\sqrt{2}\right).$$

Für den Mond erhält man so:

$$\alpha_1 = +0'',01775, \quad \alpha_2 = -0'',01713, \quad \alpha_3 = +0'',01713, \quad \alpha_4 = -0'',01775.$$

Die absoluten Werthe dieser Grössen unterscheiden sich derart, dass die Differenzen vielleicht einst durch das Horizontalpendel sichtbar gemacht werden können, woraus dann umgekehrt ein Schluss auf die Horizontalparallaxe oder Masse des Mondes möglich ist. Bei der Sonne erhält man Werthe für die α, welche sich von dem oben angeführten mittleren Werth ausserordentlich wenig unterscheiden.

Zur Lösung der cubischen Gleichungen.

I.

Herr Dr. Ludwig Matthiessen hat in seinem Werkchen «Die algebraischen Methoden der Auflösung, der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen» pag. 24 und wiederholt in dem «Schlüssel zur Aufgabensammlung von Heis», Bd. II., pag. 330, eine schöne Methode zur Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ angegeben, welche wegen ihrer elementaren Herleitung sich recht gut zum Vortrag in der Schule eignet. Dieselbe führt jedoch für den Fall drei reeller Wurzeln, wie die des Cardanus, zu einer scheinbar complexen Form dieser Wurzeln. Das Eintreten dieses Falles erkennt man daran, dass die Wurzeln der gefundenen Resolvente complex werden, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, dass die Discriminante der vorgelegten Gleichung, nämlich $(pq - 9r)^2 - 4(p^2 - 3q)(q^2 - 3pr)$, einen negativen Werth bekommt. Kommt man nun im Verlaufe der Rechnung auf eine negative Discriminante, so ist man gezwungen, doch wieder zu der gewöhnlichen Methode zurückzukehren, nämlich aus der Gleichung die zweite Potenz der Unbekannten zu entfernen und die bekannten goniometrischen Substitutionen vorzuehmen.

Ein Mittel zu finden, wodurch man diesen Umweg erspart und in den Stand gesetzt wird, in der Rechnung ungehindert fortzufahren, soll die Aufgabe der folgenden Untersuchung sein. Wir wollen zu diesem Behufe das Wesentliche der Methode Matthiessens zum Theil mit seinen eigenen Worten wiedergeben:

«Um die allgemeine Gleichung:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

«aufzulösen, setze man:

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u,$$

«wo u die neue Unbekannte, z_1 und z_2 die Wurzeln der Resolvente vom zweiten Grade bezeichnen. «Erhebt man diese substituirte Function zur dritten Potenz, so ist die nach x geordnete Gleichung:

$$x^3 - 3 \cdot \frac{z_1 - z_2 u^3}{1 - u^3} x^2 + 3 \frac{z_1^2 - z_2^2 u^3}{1 - u^3} x - \frac{z_1^3 - z_2^3 u^3}{1 - u^3} = 0.$$

«Durch Identificirung dieser Gleichung mit der gegebenen erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für z_1 und z_2:

$$u^3 = \frac{z_1 + \frac{1}{3}p}{z_2 + \frac{1}{3}p} = \frac{z_1^2 + \frac{1}{3}q}{z_2^2 + \frac{1}{3}q} = \frac{z_1^3 + r}{z_2^3 + r}.$$

«Durch Combination je zweier Gleichungen erhält man:

$$z_1 z_2 (z_1 - z_2) + \tfrac{1}{3}p (z_1^2 - z_2^2) + \tfrac{1}{3} q (z_1 - z_2) = 0,$$

«und weil $z_1 - z_2$ nicht Null werden darf

$$\text{I.} \quad z_1 z_2 + \tfrac{1}{3}p (z_1 + z_2) + \tfrac{1}{3} q = 0;$$

«und ebenso

$$z_1 z_2 (z_1^2 - z_2^2) + \tfrac{1}{3}p (z_1^3 - z_2^3) - r (z_1 - z_2) = 0,$$

«oder gleichfalls durch $z_1 - z_2$ dividirt und mit I. combinirt:

$$\text{II.} \quad \tfrac{1}{3} p z_1 z_2 + \tfrac{1}{3} q (z_1 + z_2) + r = 0.$$

«Aus den beiden Gleichungen I. und II. erhält man nun:

$$z_1 + z_2 = -\frac{pq - 9r}{p^2 - 3q}, \quad z_1 z_2 = \frac{q^2 - 3pr}{p^2 - 3q}.$$

«z_1 und z_2 sind also die Wurzeln der Resolvente:

$$(p^2 - 3q) z^2 + (pq - 9r) z + (q^2 - 3pr) = 0.»$$

Aus der Relation $u^3 = \dfrac{z_1 + \frac{1}{3}p}{z_2 + \frac{1}{3}p}$ erhält man drei Werthe für u, nämlich:

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{z_1 + \frac{1}{3}p}{z_2 + \frac{1}{3}p}}, \quad u_2 = J_1 \sqrt[3]{\frac{z_1 + \frac{1}{3}p}{z_2 + \frac{1}{3}p}}, \quad u_3 = J_2 \sqrt[3]{\frac{z_1 + \frac{1}{3}p}{z_2 + \frac{1}{3}p}},$$

wo J_1 und J_2 die complexen Cubikwurzeln aus der Einheit bezeichnen. Die Substitution $\dfrac{x - z_1}{x - z_2} = u$ gibt deshalb die folgenden Ausdrücke für x:

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt[3]{z_1 + \frac{1}{3}p} - z_1 \sqrt[3]{z_2 + \frac{1}{3}p}}{\sqrt[3]{z_1 + \frac{1}{3}p} - \sqrt[3]{z_2 + \frac{1}{3}p}},$$

$$x_2 = \frac{z_2 \sqrt[3]{z_1 + \frac{1}{3}p} - J_1 z_1 \sqrt[3]{z_2 + \frac{1}{3}p}}{\sqrt[3]{z_1 + \frac{1}{3}p} - J_1 \sqrt[3]{z_2 + \frac{1}{3}p}},$$

$$x_3 = \frac{z_2 \sqrt[3]{z_1 + \frac{1}{3}p} - J_2 z_1 \sqrt[3]{z_2 + \frac{1}{3}p}}{\sqrt[3]{z_1 + \frac{1}{3}p} - J_2 \sqrt[3]{z_2 + \frac{1}{3}p}}.$$

Wie man sieht erscheinen die 3 Werthe für x unter complexer Form, sobald z_1 und z_2 complex sind, und doch sind dann alle 3 x reell. Um diese reellen Werthe zu finden, setze man:

$$z_1 = \varrho (\cos\varphi + i \sin\varphi) \text{ und } z_2 = \varrho (\cos\varphi - i \sin\varphi),$$

wo ϱ und φ noch zu bestimmende Grössen sind; weil aber

$$z_1 + z_2 = -\frac{pq - 9r}{p^2 - 3q}, \quad z_1 z_2 = \frac{q^2 - 3pr}{p^2 - 3q}, \text{ so ist}$$

$$1) \quad \varrho \cos\varphi = -\frac{pq - 9r}{2(p^2 - 3q)},$$

$$2) \quad \varrho = \sqrt{\frac{q^2 - 3pr}{p^2 - 3q}}.$$

Nachdem man aus der zweiten dieser Gleichungen ϱ gefunden hat, bestimmt man aus der ersten nach Substitution des Werthes von ϱ den Werth von φ.

Der erste der oben mitgetheilten Ausdrücke für x gibt nun:

$$x = \frac{\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{3}p} - \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) + \frac{1}{3}p}}{\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{3}p} - \sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) + \frac{1}{3}p}},$$

und wenn man

$$\varrho\cos\varphi + \tfrac{1}{3}p = R\cos\psi \quad \text{und} \quad \varrho\sin\varphi = R\sin\psi, \quad \text{also}$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\varrho\sin\varphi}{\varrho\cos\varphi + \frac{1}{3}p}$$

setzt, und berücksichtigt, dass sich dann $R^{\frac{1}{3}}$ im Zähler und Nenner hebt,

$$x = \varrho \cdot \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sqrt[3]{\cos\psi + i\sin\psi} - (\cos\varphi + i\sin\varphi)\sqrt[3]{\cos\psi - i\sin\psi}}{\sqrt[3]{\cos\psi + i\sin\psi} - \sqrt[3]{\cos\psi - i\sin\psi}}.$$

Wendet man den Moivre'schen Satz an, welcher in der Schule auch für gebrochene Exponenten sich elementar beweisen lässt, etwa wie Schlömilch im Compendium der höheren Analysis I. pag 253 gethan hat, so erhält man daraus:

$$x = \varrho \cdot \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)(\cos\frac{1}{3}\psi + i\sin\frac{1}{3}\psi) - (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\frac{1}{3}\psi - i\sin\frac{1}{3}\psi)}{\cos\frac{1}{3}\psi + i\sin\frac{1}{3}\psi - (\cos\frac{1}{3}\psi - i\sin\frac{1}{3}\psi)},$$

und nach Ausführung der Multiplicationen und Reduction:

$$4)\quad x_1 = \varrho \cdot \frac{\sin(\frac{1}{3}\psi - \varphi)}{\sin\frac{1}{3}\psi}.$$

Dies ist die eine Wurzel der vorgelegten Gleichung; um die beiden andern zu finden, bedenke man, dass in der Gleichung 3) zu dem dort gefundenen Werthe von $\operatorname{tg}\psi$ nicht blos der Winkel ψ, sondern auch die Winkel $180^0 + \psi$ und $360^0 + \psi$ gehören. Man setze daher in 4) nach einander statt $\frac{1}{3}\psi$ die Werthe $60^0 + \frac{1}{3}\psi$ und $120^0 + \frac{1}{3}\psi$, so erhält man:

$$5)\quad x_2 = \varrho \cdot \frac{\sin(60^0 + \frac{1}{3}\psi - \varphi)}{\sin(60^0 + \frac{1}{3}\psi)},$$

$$6)\quad x_3 = \varrho \cdot \frac{\sin(120^0 + \frac{1}{3}\psi - \varphi)}{\sin(120^0 + \frac{1}{3}\psi)} = \varrho \cdot \frac{\sin(60^0 - \frac{1}{3}\psi + \varphi)}{\sin(60^0 - \frac{1}{3}\psi)}.$$

Wenn man $p = 0$ nimmt, so wird

$$\varrho\cos\varphi = -\frac{3r}{2q}, \quad \varrho = \sqrt{-\frac{q}{3}} \quad \text{und} \quad \varphi = \psi,$$

und man erhält für x die bekannten goniometrischen Ausdrücke wieder. Es wird nämlich:

$$x_1 = -\varrho \cdot \frac{\sin\frac{2}{3}\varphi}{\sin\frac{1}{3}\varphi} = -2\varrho \cdot \frac{\sin\frac{1}{3}\varphi\cos\frac{1}{3}\varphi}{\sin\frac{1}{3}\varphi} = -2\varrho\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$x_2 = \varrho \cdot \frac{\sin(60^0 - \frac{2}{3}\varphi)}{\sin(60^0 + \frac{1}{3}\varphi)} = 2\varrho \cdot \frac{\sin(30^0 - \frac{1}{3}\varphi)\cos(30^0 - \frac{1}{3}\varphi)}{\cos(30^0 - \frac{1}{3}\varphi)} = 2\varrho\sin(30^0 - \tfrac{1}{3}\varphi) = 2\varrho\cos(60^0 + \tfrac{1}{3}\varphi),$$

$$x_3 = \varrho \cdot \frac{\sin(60^0 + \frac{2}{3}\varphi)}{\sin(60^0 - \frac{1}{3}\varphi)} = 2\varrho \cdot \frac{\sin(30^0 + \frac{1}{3}\varphi)\cos(30^0 + \frac{1}{3}\varphi)}{\cos(30^0 + \frac{1}{3}\varphi)} = 2\varrho\sin(30^0 + \tfrac{1}{3}\varphi) = 2\varrho\cos(60^0 - \tfrac{1}{3}\varphi).$$

Um ein Beispiel für die Anwendung dieser Formeln zu geben, wählen wir die von Matthiessen nach der Gräffe'schen Methode behandelte Gleichung (Schlüssel II., pag. 422):

$$x^3 + 2x^2 - 30x + 39 = 0.$$

Hier ist $p = 2$, $q = -30$, $r = 39$, also $p^2 - 3q = 94$, $q^2 - 3pr = 666$, $pq - 9r = -411$;

folglich ist die Discriminante negativ, nämlich gleich $411^2 - 4 . 94 . 666 = - 81495$, und man ist gezwungen, den goniometrischen Weg einzuschlagen. Man hat demnach:

$$\varrho = \sqrt{\frac{666}{94}}, \quad \lg \varrho = 0{,}4251731,$$

$$\varrho \cos \varphi = \frac{411}{188}, \qquad \varphi = 34^0\, 46'\, 59'',4,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\varrho \sin \varphi}{\frac{411}{188} + \frac{2}{3}} = \frac{564\, \varrho \sin \varphi}{1609}, \quad \psi = 28^0\, 1'\, 29'',9.$$

Daraus folgt:

$$x_1 = - \varrho \cdot \frac{\sin 25^0\, 26'\, 29'',4}{\sin 9^0\, 20'\, 30''} = - 7{,}04452,$$

$$x_2 = \quad \varrho \cdot \frac{\sin 34^0\, 33'\, 30'',6}{\sin 69^0\, 20'\, 30''} = + 1{,}61365,$$

$$x_3 = \quad \varrho \cdot \frac{\sin 85^0\, 26'\, 29'',4}{\sin 50^0\, 39'\, 30''} = + 3{,}43087.$$

Wenn zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung einander nahezu gleich sind, so hat die Discriminante einen kleinen Werth und die Formel 1) gibt dann für φ auch einen kleinen Werth, der aber durch dieselbe nur ungenau gefunden wird, weil die Cosinusse kleiner Winkel sich nur wenig von einander unterscheiden. In diesem Falle erhält man vorerst durch Division von 1) und 2)

$$\cos \varphi = - \frac{p\, q - 9\, r}{2 \sqrt{(p^2 - 3q)\,(q^2 - 3\, p\, r)}}$$

und daraus

$$7) \quad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{\sqrt{4\,(p^2 - 3\, q)\,(q^2 - 3\, p\, r) - (p\, q - 9\, r)^2}}{p\, q - 9\, r},$$

wo die Discriminante im Zähler erscheint, deren Berechnung ohnedies unumgänglich ist, um über die Anwendbarkeit unserer Methode entscheiden zu können. Auch die Formel 3) muss für diesen Fall umgestaltet werden, weil sie $\cos \varphi$ enthält. Dies geschieht am besten so, dass man in die Identität

$$\operatorname{tg}(\psi - \tfrac{1}{2} \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \psi \, . \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}$$

auf der rechten Seite den Werth von $\operatorname{tg} \psi$ aus 3) substituirt und Alles durch Sinus und Cosinus ausdrückt. Man erhält so:

$$\operatorname{tg}(\psi - \tfrac{1}{2} \varphi) = \frac{\varrho \sin \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi - \varrho \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi - \frac{1}{3} p \sin \frac{1}{2} \varphi}{\varrho \cos \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi + \varrho \sin \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi + \frac{1}{3} p \cos \frac{1}{2} \varphi} = \frac{\varrho \sin \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{3} p \sin \frac{1}{2} \varphi}{\varrho \cos \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{3} p \cos \frac{1}{2} \varphi}$$

oder

$$8) \quad \operatorname{tg}(\psi - \tfrac{1}{2} \varphi) = \frac{\varrho - \frac{1}{3} p}{\varrho + \frac{1}{3} p} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi.$$

Als Beispiel diene die Gleichung:

$$x^3 + 11\, x^2 - 102\, x + 181 = 0.$$

Man hat hier $p = 11$. $q = - 102$, $r = 181$, also $p^2 - 3q = 427$, $q^2 - 3pr = 4431$, $p\, q - 9\, r = - 2751$; es ist daher

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{147}}{2751}, \quad \varphi = 15'\, 9'',0555,$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{4431}{427}} = 3{,}221342, \quad \lg \varrho = 0{,}5080369,$$

$$\operatorname{tg}(\psi - 7'\, 34'',5277) = - \frac{0{,}445325}{6{,}888009} \operatorname{tg} 7'\, 34'',5277,$$

$$\psi = 7'\, 5'',1413.$$

$$x_1 = -\varrho \cdot \frac{\sin 12' 47'',3417}{\sin 2' 21'',7138} = -17{,}44265,$$

$$x_2 = \varrho \cdot \frac{\sin 59^0 47' 12'',66}{\sin 60^0 2' 21'',71} = 3{,}21313,$$

$$x_3 = \varrho \cdot \frac{\sin 60^0 12' 47'',34}{\sin 59^0 57' 38'',29} = 3{,}22952.$$

II.

Wenn die drei Wurzeln einer reducirten cubischen Gleichung reell sind, so findet man dieselben gewöhnlich dadurch, dass man ihre Coefficienten mit den Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in den Identitäten

$$\cos 3\varphi = -3\cos\varphi + 4\cos^3\varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

vergleicht. Man kann aber auch von der Identität

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi} \text{ oder}$$

$$1)\quad \operatorname{tg}^3\varphi - 3\operatorname{tg}3\varphi\operatorname{tg}^2\varphi - 3\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}3\varphi = 0$$

ausgehen und dieselbe mit der allgemeinen Gleichung

$$2)\quad y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

vergleichen. Setzt man nämlich:

$$3)\quad y = \varrho\operatorname{tg}\varphi,$$

so geht vorstehende Gleichung über in:

$$\operatorname{tg}^3\varphi + \frac{\alpha}{\varrho}\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{\beta}{\varrho^2}\operatorname{tg}\varphi + \frac{\gamma}{\varrho^2} = 0,$$

und dies gibt, verglichen mit 1) die Bedingungsgleichungen:

$$4)\quad \frac{\alpha}{\varrho} = -3\operatorname{tg}3\varphi, \qquad 5)\quad \frac{\beta}{\varrho^2} = -3, \qquad 6)\quad \frac{\gamma}{\varrho^3} = \operatorname{tg}3\varphi,$$

welche sich durch Elimination von ϱ und $\operatorname{tg} 3\varphi$ auf eine Relation zwischen den Coefficienten zusammenziehen, nämlich auf die Reducente

$$\alpha\beta - 9\gamma = 0.$$

Variirt man deshalb die gegebene Gleichung

$$7)\quad x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

indem man

$$x = y + z$$

setzt, so dass man

$$y^3 + (3z + p)y^2 + (3z^2 + 2pz + q)y + z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

oder kürzer

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

erhält, und wendet die Reducente $\alpha\beta - 9\gamma = 0$ an, so ist

$$(3z + p)(3z^2 + 2pz + q) = 9(z^3 + pz^2 + qz + r),$$

woraus man

$$8)\quad z = -\frac{pq - 9r}{2(p^2 - 3q)}$$

erhält. Die Gleichung 5) gibt dann $\varrho^2 = -\frac{\beta}{3}$ oder

$$9)\quad \varrho^2 = -\frac{3z^2 + 2pz + q}{3},$$

und die Gleichung 4)

$$10)\quad \operatorname{tg}3\varphi = -\frac{3z + p}{3\varrho}.$$

Setzt man aus 8) den Werth von z in 9) ein, so erhält man:

$$11)\quad \varrho^2 = -\frac{(pq-9r)^2 - 4(p^2-3q)(q^2-3pr)}{4(p^2-3q)^2},$$

wo der Zähler gleich der Discriminante ist, die man ohnedies berechnen muss, um über die Anwendbarkeit unserer Methode entscheiden zu können; denn nur dann, wenn dieselbe negativ ist, erhält ϱ^2 einen positiven Werth und die drei reellen Wurzeln können auf goniometrischem Wege gefunden werden. Man berechne also zuerst durch Gleichung 11) die Grösse ϱ und dann durch 10) den Winkel φ, alsdann hat man nach Gleichung 3) $y_1 = \varrho \operatorname{tg} \varphi$, wo y_1 den ersten Wurzelwerth der Gleichung $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ bedeutet. Es ist dabei gleichgültig, welches Zeichen man dem ϱ gibt, weil $\operatorname{tg} 3\varphi$ und folglich auch $\operatorname{tg}\varphi$ zugleich mit ϱ das Zeichen wechselt nach Gleichung 10. Die zwei noch übrigen reellen Wurzeln findet man durch die Bemerkung, dass in der Gleichung 10) zu der Tangente auf der rechten Seite nicht nur der Winkel 3φ, sondern auch die Winkel $180^\circ + 3\varphi$ und $360^\circ + 3\varphi$ gehören; es ist daher $y_2 = \varrho \operatorname{tg}(60^\circ + \varphi)$ und $y_3 = \varrho \operatorname{tg}(120^\circ + \varphi) = -\varrho \operatorname{tg}(60^\circ - \varphi)$. Folglich hat man:

$$12)\quad \begin{cases} x_1 = z + \varrho \operatorname{tg}\varphi, \\ x_2 = z + \varrho \operatorname{tg}(60^\circ + \varphi), \\ x_3 = z - \varrho \operatorname{tg}(60^\circ - \varphi). \end{cases}$$

Diesen Resultaten kann man, wenn man will, noch eine andere Form geben, indem man aus Gleichung 10) den Werth von z, nämlich $-\frac{p}{3} - \varrho \operatorname{tg} 3\varphi$, substituirt. Man bekommt dann:

$$13)\quad \begin{cases} x_1 = -\frac{p}{3} + \varrho(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}3\varphi) = -\frac{p}{3} - \varrho \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos\varphi \cos 3\varphi} = -\frac{p}{3} - 2\varrho \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos 3\varphi}, \\ x_2 = -\frac{p}{3} + \varrho[\operatorname{tg}(60^\circ + \varphi) - \operatorname{tg}3\varphi] = -\frac{p}{3} + \varrho \cdot \frac{(\sin 60^\circ - 2\varphi)}{\cos(60^\circ + \varphi)\cos 3\varphi} = \\ \qquad = -\frac{p}{3} + \varrho \frac{\sin(120^\circ + 2\varphi)}{\cos(60^\circ + \varphi)\cos 3\varphi} = -\frac{p}{3} + 2\varrho \cdot \frac{\sin(60^\circ + \varphi)}{\cos 3\varphi}, \\ x_3 = -\frac{p}{3} - \varrho[\operatorname{tg}(60^\circ - \varphi) + \operatorname{tg}3\varphi] = -\frac{p}{3} - \varrho \cdot \frac{\sin(60^\circ + 2\varphi)}{\cos(60^\circ - \varphi)\cos 3\varphi} = \\ \qquad = -\frac{p}{3} - \varrho \cdot \frac{\sin(120^\circ - 2\varphi)}{\cos(60^\circ - \varphi)\cos 3\varphi} = -\frac{p}{3} - 2\varrho \cdot \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\cos 3\varphi}. \end{cases}$$

Diese Formeln werden sehr einfach, wenn die Gleichung eine reducirte, also $p = 0$ ist; es ist nämlich dann:

$$z = -\frac{3r}{2q}, \quad \varrho^2 = -\frac{27r^2 + 4q^3}{12q^2}, \quad \operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3r}{2q\varrho},$$

$$x_1 = -2\varrho \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos 3\varphi}, \quad x_2 = 2\varrho \cdot \frac{\sin(60^\circ + \varphi)}{\cos 3\varphi}, \quad x_3 = -2\varrho \cdot \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\cos 3\varphi}.$$

Wenn die Discriminante der gegebenen Gleichung Null ist, so scheint diese Auflösung im Stiche zu lassen, weil dann $\varrho = 0$ und $\operatorname{tg} 3\varphi = \infty$, also $3\varphi = 90^\circ$ oder 270° oder 450° und $\varphi = 30^\circ$ oder 90° oder 150° wird, und daher die x unter der unbestimmten Form $0 . \infty$ erscheinen. Man hat aber in diesem Falle in der Gleichung $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ ausser $\alpha\beta - 9\gamma = 0$ noch $\beta = 0$ und erhält daher:

$$y^2(y + \alpha) = 0,$$

so dass

$$x_1 = z - \alpha = z - (3z + p) = -(2z + p) = -\frac{p^3 - 4pq + 9r}{p^2 - 3q}$$

$$\text{und}\quad x_2 = x_3 = z = -\frac{pq - 9r}{2(p^2 - 3q)}.$$

Als Beispiel für diese Methode mag die schon früher behandelte Gleichung:

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$$

dienen; hier ist

$$z = \frac{2761}{854}, \quad \varrho = \frac{\sqrt{147}}{854}, \quad \operatorname{tg} 3\varphi = -\frac{17647}{2562\varrho}.$$

Weil 3φ nur um ein wenig grösser ist als 90^0, so setze man $3\varphi = 90 + \delta$, also $\operatorname{tg} 3\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}$; man erhält dann $\operatorname{tg}\delta$ aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2562\varrho}{17647} = \operatorname{tg} 7'5'',14137.$$

Daraus folgt $3\varphi = 90^0\,7'5'',14137$ und $\varphi = 30^0\,2'21'',71379$ und endlich:

$$x_1 = \frac{2751}{854} + \varrho \,.\, \operatorname{tg} 30^0\,2'21'',71 = 3,22952;$$

$$x_2 = \frac{2751}{854} + \varrho \,.\, \operatorname{tg} 90^0\,2'21'',71379 = \frac{2751}{854} - \frac{\varrho}{\operatorname{tg} 2'21'',71379} = -\,17,44265;$$

$$x_3 = \frac{2751}{854} - \varrho \,.\, \operatorname{tg} 29^0\,57'38'',29 = 3,21313.$$

Nach der gewöhnlichen goniometrischen Methode hätte man die Gleichung erst durch die Substitution $x = y - \frac{11}{3}$ auf die Form reduciren müssen:

$$y^3 - \frac{427}{3}y + \frac{17647}{27} = 0;$$

dann hätte man $\varrho = \sqrt{\frac{4\,.\,427}{9}}$ und $\cos 3\varphi = -\frac{17647}{3\,.\,427\,\varrho}$ oder $\sin 3\varphi = +\frac{17647}{3\,.\,427\,\varrho}$ gesetzt und daraus den Winkel 3φ bestimmt; derselbe würde aber, weil der Bruch $\frac{17647}{3\,.\,427\,\varrho}$ nahezu der Einheit gleich ist, welches immer vorkommt, wenn die Discriminante einen kleinen Werth hat, bei der Anwendung des Cosinus zwischen $179^0\,53'\,10''$ und $179^0\,52'\,50''$ und bei der Anwendung des Sinus zwischen $89^0\,52'\,50''$ und $89^0\,53'\,10''$ geschwankt haben und wäre desshalb zu einer genaueren Bestimmung der Wurzeln unbrauchbar gewesen. Diese ist nur dadurch ausführbar, dass man aus dem Werthe von $\cos 3\varphi$ den von $\operatorname{tg} 3\varphi$ entwickelt. Der Aufwand von Rechnung wäre also auch bei der gewöhnlichen Methode ein wenigstens ebenso grosser gewesen wie bei der vorgetragenen.

Ueber eine Erweiterung der regula falsi und den Zusammenhang derselben mit der Newton'schen Näherungsmethode.

Wenn a, b, g drei Grössen sind, die sich nur wenig von einander unterscheiden, und $f(a)$, $f(b)$, $f(g)$ die Werthe, welche eine Function von x $f(x)$ annimmt, wenn nach und nach a, b, g für x gesetzt werden, so hat man bekanntlich

$$\frac{b-a}{g-a} = \frac{f(b)-f(a)}{f(g)-f(a)}$$

um so genauer, je kleiner die Differenzen $b-a$ und $g-a$ sind; vgl. Baltzer, Elem. d. Math., I., S. 209 u. 253. Ist g derjenige Werth, welcher die Funktion $f(x)$ zu Null macht, d. h. ein Wurzelwerth derselben, so ist

$$\frac{b-a}{g-a} = \frac{f(b)-f(a)}{-f(a)},$$

wodurch man die Unbekannte g finden kann, wenn b und c zwei Näherungswerthe derselben sind, nämlich

$$g - a = -\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Man nennt diese Methode die regula falsi; sie ist auf Functionen jeder Art anwendbar und gibt bei ganzen rationalen Functionen des ersten Grades den genauen Wurzelwerth, sonst nur Näherungswerthe. Dieselbe ist ihrem Wesen nach nicht verschieden von der nach Newton benannten Näherungsmethode (vgl. Baltzer a. a. O. S. 255), wie jetzt gezeigt werden soll.

Es seien a, b, c Näherungswerthe einer Wurzel von $f(x)$, die von derselben um weniger als die Einheit abweichen; alsdann ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\left.\begin{aligned} f(b) &= f[a+(b-a)] = f(a) + (b-a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 f''(a) + \ldots\ldots \\ f(c) &= f[a+(c-a)] = f(a) + (c-a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(c-a)^2 f''(a) + \ldots\ldots \\ f(x) &= f[a+(x-a)] = f(a) + (x-a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ausserdem hat man noch $f(a) \equiv f(a)$.

Ist x der genaue Wurzelwerth, dann ist $f(x) = 0$, und es folgt aus der ersten, dritten und vierten dieser Gleichungen, wenn man nur die ersten Potenzen der kleinen Grössen $b-a$, $c-a$, $x-a$ berücksichtigt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} f(a) & 1 & 0 \\ f(b) & 1 & b-a \\ 0 & 1 & x-a \end{vmatrix}$$

gleich Null sei. Dadurch, dass man die erste Horizontalreihe dieser Determinante von allen folgenden abzieht, erhält diese Gleichung die Gestalt:

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & b-a \\ -f(a) & x-a \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

woraus wie oben folgt:

$$x - a = -\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}. \quad (3)$$

Die ganze Herleitung ist jedoch nur dann richtig, wenn nicht $f'(a) = 0$ ist.

Der Newton'schen Näherungsmethode liegt die dritte der Gleichungen (1), wenn man darin $f(x) = 0$ setzt, nämlich:

$$0 = f(a) + (x-a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \ldots\ldots$$

zu Grunde, woraus mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $x-a$ folgt:

$$x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}, \quad (4)$$

ein Resultat, das ebenfalls nur richtig ist, wenn nicht $f'(a) = 0$ ist. Man sieht auf der Stelle, dass die Gleichung (4) auch aus der Gleichung (3) hergeleitet werden kann, wenn man b dem a immer näher kommen lässt, bis es mit ihm zusammenfällt. Die Newton'sche Näherungsmethode in ihrer einfachsten Gestalt ist also dem Princip nach identisch mit der regula falsi in ihrer einfachsten Gestalt. Die Newton'sche Methode kann aber noch dadurch erweitert werden, dass man auch noch die zweite Potenz von $x-a$ berücksichtigt; die Wurzel wird dann durch die quadratische Gleichung

$$0 = f(a) + (x-a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) \quad (5)$$

bestimmt; das Resultat ist nur dann illusorisch, wenn $f''(a) = 0$, wodurch man auf (4) zurückkommt. Man erhält aber auch nach der Methode der regula falsi eine quadratische Gleichung für x, wenn man noch einen weiteren Näherungswerth c für x hinzunimmt. Die 4 Gleichungen (1) können nämlich, wenn man jetzt auch noch die zweiten Potenzen von $b-a$, $c-a$, $x-a$ beibehält, nur zusammenbestehen, wenn man die Determinante

$$\begin{vmatrix} f(a) & 1 & 0 & 0 \\ f(b) & 1 & b-a & (b-a)^2 \\ f(c) & 1 & c-a & (c-a)^2 \\ 0 & 1 & x-a & (x-a)^2 \end{vmatrix}$$

gleich Null setzt. Man kann derselben eine einfachere Gestalt geben, wenn man die erste Horizontalreihe von allen folgenden abzieht; man erhält dann:

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & b-a & (b-a)^2 \\ f(c)-f(a) & c-a & (c-a)^2 \\ -f(a) & x-a & (x-a)^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Es ist klar, dass das Resultat illusorisch ist, wenn eine der Grössen $f'(a)$ oder $f''(a)$ gleich Null ist.

Der Zusammenhang beider Methoden wird durch eine geometrische Betrachtung sich noch klarer stellen lassen. Betrachtet man zu diesem Zwecke $y=f(x)$ als die Gleichung einer Curve des n^{ten} Grades, so sind $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ die Ordinaten derselben, die zu den Abcissen a, b, c gehören. Denkt man sich vorerst durch die Punkte $x=a$, $y=f(a)$ und $x=b$, $y=f(b)$ eine gerade Linie gelegt, so ist diese eine Sehne der Curve, deren Durchschnittspunkt mit der Abscissenaxe um so weniger weit von dem Durchschnitt der Curve mit der Abscissenaxe entfernt ist, je näher a und b dem Wurzelwerthe liegen. Die Gleichung dieser Sehne findet man, indem man mit der Gleichung

$$y = A + Bx$$

die zwei anderen

$$f(a) = A + Ba,$$
$$f(b) = A + Bb$$

verbindet; man erhält so:

$$\begin{vmatrix} f(a) & 1 & a \\ f(b) & 1 & b \\ y & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man in derselben $y=0$, um den Durchschnittspunkt der Sehne mit der Abscissenaxe zu erhalten, so kommt:

$$\begin{vmatrix} f(a) & 1 & a \\ f(b) & 1 & b \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0;$$

wenn man dann die erste Horizontalreihe dieser Determinante von allen folgenden abzieht, so ergibt sich dieselbe Gleichung, die wir oben (2) erhalten haben. Rückt nun der Punkt b dem Punkte a immer näher, bis er mit ihm zusammenfällt, so geht diese Sehne in die Tangente an die Curve im Punkte a über, deren Gleichung man erhält, wenn man von den drei Gleichungen

$$y = A + Bx$$
$$f(a) = A + Ba$$
$$f'(a) = \quad B$$

ausgeht; es gibt dann

$$\begin{vmatrix} f(a) & 1 & a \\ f'(a) & 0 & 1 \\ y & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man auch hier $y=0$, so erhält man

$$x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

also den Newton'schen Näherungswerth.

Denkt man sich ferner durch die Punkte $x = a$, $y = f(a)$, $x = b$, $y = f(b)$, $x = c$, $y = f(c)$ eine Parabel gelegt, deren Hauptaxe senkrecht auf der Abscissenaxe steht, so gibt dieselbe in der Nähe dieser Punkte, wenn sie nur nahe genug beisammen liegen, ungefähr den Verlauf der parabolischen Curve an und kann statt derselben näherungsweise eintreten; die Abscissen der Punkte, wo sie die Abscissenaxe schneidet, werden entweder beide Näherungswerthe der Wurzeln der gegebenen Gleichung sein, oder wenigstens wird dies von einem derselben behauptet werden können, sobald nur a, b, c einem Wurzelwerthe der Gleichung nahe genug sind. Die Gleichung der Parabel ergibt sich durch Verbindung der Gleichung

$$y = A + Bx + Cx^2$$

mit den drei anderen:

$$\begin{aligned} f(a) &= A + Ba + Ca^2, \\ f(b) &= A + Bb + Cb^2, \\ f(c) &= A + Bc + Cc^2, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{vmatrix} f(a) & 1 & a & a^2 \\ f(b) & 1 & b & b^2 \\ f(c) & 1 & c & c^2 \\ y & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

folgt; durch Nullsetzen von y und durch Subtraction der ersten Horizontalreihe von allen übrigen erhält man hieraus als Bestimmungsgleichung für x:

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & b - a & b^2 - a^2 \\ f(c) - f(a) & c - a & c^2 - a^2 \\ - f(a) & x - a & x^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0;$$

zieht man jetzt die mit $2a$ multiplicirte zweite Vertikalreihe von der dritten ab, so kommt wieder die Gleichung (6) zum Vorschein.

Lässt man nun die Punkte b und c dem Punkte a immer näher rücken, bis sie mit ihm zusammenfallen, so geht unsere Parabel über in eine andere Parabel, deren Hauptaxe ebenfalls senkrecht steht auf der Abscissenaxe, welche aber die gegebene Curve in dem Punkte a dreipunktig berührt oder osculirt; man erhält die Gleichung derselben, indem man die Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= A + Bx + Cx^2, \\ f(a) &= A + Ba + Ca^2, \\ f'(a) &= \phantom{A +{}} B + 2Ca, \\ f''(a) &= \phantom{A + B +{}} 2C \end{aligned}$$

combinirt, in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} f(a) & 1 & a & a^2 \\ f'(a) & 0 & 1 & 2a \\ f''(a) & 0 & 0 & 2 \\ y & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Zieht man in dieser Determinante, nachdem in ihr y gleich Null gesetzt ist, die erste Horizontalreihe von der letzten ab, so erhält die zweite Vertikalreihe drei Nullen, und man bekommt als Bestimmungsgleichung für x:

$$\begin{vmatrix} f'(a) & 1 & 2a \\ f''(a) & 0 & 2 \\ - f(a) & x - a & x^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche dadurch, dass man die mit $2a$ multiplicirte zweite Vertikalreihe von der dritten abzieht, folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} f'(a) & 1 & 0 \\ f''(a) & 0 & 2 \\ - f(a) & x - a & (x - a)^2 \end{vmatrix} = 0; \qquad (7)$$

die Entwickelung liefert:
$$0 = f(a) + (x - a) f'(a) + \tfrac{1}{2} (x - a)^2 f''(a),$$
also die Newton'sche Näherungsgleichung.

Aus dieser Darstellung ergibt sich, wie die regula falsi in ihrer einfachen und in ihrer erweiterten Form mit der Newton'schen Näherungsmethode in ihren beiden Gestalten übereinstimmt und wie sie sich von derselben unterscheidet. Bei der letzteren wird entweder statt der gegebenen parabolischen Curve eine gerade Linie substituirt, welche die Curve in dem Punkte, dessen Abscisse gleich einem Näherungswerthe von x ist, berührt, oder aber eine Parabel, deren Hauptaxe auf der Abscissenaxe senkrecht steht und welche in dem Punkte, dessen Abscisse gleich einem Näherungswerthe von x ist, eine dreipunktige Berührung mit der Curve hat oder dieselbe osculirt. Bei der regula falsi tritt statt der Tangente eine Sehne auf, welche zwei Näherungspunkte verbindet und statt der osculirenden Parabel eine solche, die durch 3 Näherungspunkte geht. Die 2 Punkte, bezüglich 3 Punkte, welche bei der einfachen, bezüglich erweiterten regula falsi auseinanderliegen, fallen bei der Newton'schen Methode in ihren 2 Formen zusammen. Man kann demgemäss auch eine Verbindung beider Methode vornehmen, welche unter Umständen nützlich werden kann. Bestimmt man nämlich die Hülfsparabel so, dass ihre Hauptaxe senkrecht auf der Abscissenaxe steht, dass sie die gegebene parabolische Curve in einem gegebenen Punkte, dem ersten Näherungswerthe, zweipunktig berührt, und dass sie endlich einen zweiten Punkt, den zweiten Näherungswerth, mit ihr gemeinschaftlich hat, so muss man von den Gleichungen ausgehen:
$$\begin{aligned} y &= A + Bx + Cx^2, \\ f(a) &= A + Ba + Ca^2, \\ f'(a) &= \quad\;\; B + 2Ca, \\ f(b) &= A + Bb + Cb^2, \end{aligned}$$
woraus als Gleichung der Hülfsparabel folgt:
$$\begin{vmatrix} f(a) & 1 & a & a^2 \\ f'(a) & 0 & 1 & 2a \\ f(b) & 1 & b & b^2 \\ y & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0,$$
in welcher man nur noch $y = 0$ zu setzen hat, um die Gleichung zur Bestimmung der zweiten Näherungswerthe zu erhalten. Letztere Gleichung erhält dadurch, dass man die erste Horizontalreihe von der dritten und vierten abzieht, drei Nullen in der zweiten Vertikalreihe und heisst dann so:
$$\begin{vmatrix} f'(a) & 1 & 2a \\ f(b) - f(a) & b - a & b^2 - a^2 \\ -f(a) & x - a & x^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0;$$
wenn man jetzt die mit $2a$ multiplicirte zweite Vertikalreihe von der dritten abzieht, so kommt endlich die zur Berechnung bequeme Gleichung:
$$\begin{vmatrix} f'(a) & 1 & 0 \\ f(b) - f(a) & b - a & (b - a)^2 \\ -f(a) & x - a & (x - a)^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Dasselbe Ergebniss ergibt sich auf rein analytischem Wege, wenn man von der ersten und dritten der Gleichungen (1) und der Identität $f'(a) \equiv f'(a)$ ausgeht; statt der letzteren kann man auch die andere $mf'(a) + nf''(a) \equiv mf'(a) + nf''(a)$ nehmen, wo m und n beliebig gewählte Constanten sind, und erhält alsdann das Resultat:
$$\begin{vmatrix} mf'(a) + nf''(a) & m & n \\ f(b) - f(a) & b - a & (b - a)^2 \\ -f(a) & x - a & (x - a)^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8 a.}$$

Wir haben uns bisher einer Hülfsparabel bedient, um dem Lauf einer parabolischen Curve in der Nähe von 3 nahe aneinander liegenden Punkten darzustellen; da der **Kreis** durch drei Punkte bestimmt wird, so liegt es nahe, denselben zu demselben Zwecke zu verwenden. Liegen vorerst wiederum die drei Punkte, welche den Näherungswerthen a, b, c entsprechen, ganz von einander getrennt und in der Nähe des Durchschnittspunktes der Curve mit der Abscissenaxe, so hat man, um den Hülfskreis zu bestimmen von den 4 Gleichungen auszugehen:

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 &= r^2,\\ (a-\alpha)^2+[f(a)-\beta]^2 &= r^2,\\ (b-\alpha)^2+[f(b)-\beta]^2 &= r^2,\\ (c-\alpha)^2+[f(c)-\beta]^2 &= r^2,\end{aligned}$$

welche dadurch, dass man von der ersten nach einander die drei anderen abzieht, sich in die folgenden drei verwandeln:

$$\begin{aligned}x^2-a^2+y^2-f(a)^2-2\alpha(x-a)-2\beta[y-f(a)] &= 0,\\ x^2-b^2+y^2-f(b)^2-2\alpha(x-b)-2\beta[y-f(b)] &= 0,\\ x^2-c^2+y^2-f(c)^2-2\alpha(x-c)-2\beta[y-f(c)] &= 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Determinante:

$$\begin{vmatrix} y-f(a) & x-a & x^2-a^2+y^2-f(a)^2 \\ y-f(b) & x-b & x^2-b^2+y^2-f(b)^2 \\ y-f(c) & x-c & x^2-c^2+y^2-f(c)^2 \end{vmatrix}=0;$$

setzt man darin $y=0$ und wendet einige leicht zu ermittelnde Umformungen an, welche den schon oben angewendeten ähnlich sind, so erhält man als Gleichung zur Bestimmung des neuen Näherungswerthes:

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & b-a & (b-a)^2+[f(b)-f(a)]^2 \\ f(c)-f(a) & c-a & (c-a)^2+[f(c)-f(a)]^2 \\ -f(a) & x-a & (x-a)^2+f(a)^2 \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

Fallen zweitens zwei der drei Näherungspunkte zusammen, d. h. wendet man einen Hülfskreis an, der die gegebene Curve in einem Punkte **zweipunktig** berührt und durch einen zweiten Punkt derselben geht, so hat man folgende Gleichungen zu combiniren:

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 &= r^2,\\ (a-\alpha)^2+[f(a)-\beta]^2 &= r^2,\\ 2(a-\alpha)+2[f(a)-\beta]f'(a) &= 0,\\ (b-\alpha)^2+[f(b)-\beta]^2 &= r^2,\end{aligned}$$

aus denen, wenn man darin $y=0$ gesetzt hat, in ähnlicher Weise wie oben, die Näherungsgleichung entsteht:

$$\begin{vmatrix} f'(a) & 1 & 0 \\ f(b)-f(a) & b-a & (b-a)^2+[f(b)-f(a)]^2 \\ -f(a) & x-a & (x-a)^2+f(a)^2 \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Fallen endlich alle drei Näherungspunkte in einem Punkt zusammen, d. h. wendet man einen Hülfskreis an, der die gegebene Curve in einem Punkte **dreipunktig** berührt oder osculirt, so ergeben die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 &= r^2,\\ (a-\alpha)^2+[f(a)-\beta]^2 &= r^2,\\ (a-\alpha)^2+[f(a)-\beta]f'(\beta) &= 0,\\ 1+f'(a)^2+[f(a)-\beta]f''(a) &= 0\end{aligned}$$

die Näherungsgleichung:

$$\begin{vmatrix} f'(a) & 1 & 0 \\ f''(a) & 0 & 2\,[1+f'(a)^2] \\ -f(a) & x-a & (x-a)^2+f(a)^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (11)$$

welche auch Herr A. Frank in Graz (Zeitschr. f. d. math. u. nat. Unt., 6. Jahrg., S. 436) gefunden und discutirt hat.

Es ist interessant, die Gleichungen (9), (10) u. (11) mit den entsprechenden (6), (8) u. (7) zusammenzustellen; der Vergleich fällt in Bezug auf Einfachheit zu Gunsten der letzteren aus. Auch ist wohl anzunehmen, dass sich eine Parabel dem Laufe einer parabolischen Curve im Allgemeinen besser anschliessen werde, als ein Kreis. Ferner sind die Methoden, bei denen ein Hülfskreis zur Anwendung kommt, nur durch analytisch-geometrische Betrachtungen entwickelbar, während die Methoden mit der Hülfsparabel sich aus der Entwicklung einer Function nach dem Taylor'schen Lehrsatz unmittelbar ergeben.

Herr A. Frank (a. a. O.) hat allerdings in dem aus Gleichung (11) entwickelten Ausdrucke für $x-a$ unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $f(a)$ immer sehr klein sein müsse, durch abgekürzte Berechnung der Wurzelgrösse eine Vereinfachung angebracht; dieselbe ist jedoch nicht erlaubt, wenn auch $f'(a)$ sehr klein ist, a also in der Nähe eines Culminationspunktes der Curve sich befindet, was namentlich dann vorkommen kann, wenn 2 Wurzeln nahe beisammen liegen und man dieselben noch nicht getrennt hat. Auch kann man dieselbe Vereinfachung unter demselben Vorbehalt bei der Newton'schen Näherungsformel anbringen und erhält dann:

$$x-a = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f(a)^2 . f''(a)}{2\,f'(a)^3},$$

während Hr. F. aus seiner Formel entwickelt:

$$x-a = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f(a)^2 . f''(a)}{2\,f'(a) . [1+f'(a)^2]},$$

ein Resultat, das sich in den Fällen, wo $f'(a)$ sehr gross ist — und gerade in diesen ist die Vereinfachung vorzugsweise erlaubt — von dem vorhergehenden nur äusserst wenig unterscheidet, aber für die logarithmische Rechnung unbequem ist.