Stoll, F.X. (1884): Über sphärische Vielecke, die einem Kreise eingeschrieben und einem andern Kreise umgeschrieben sind, In: Schlömilch, Oskar, Emil Kahl und Moritz Cantor (Hg.): Zeitschrift für Mathemathik und Physik. 39.Jg., Leipzig, Seite 91 - 110.

VI.

Ueber sphärische Vielecke, die einem Kreise eingeschrieben und einem andern Kreise umgeschrieben sind.

Von

Dr. Stoll,

Gymnasiallehrer in Bensheim.

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt und dessen Erzeugende mit derselben den constanten Winkel r bilden:

$$1)\qquad z^2 = (x^2+y^2+z^2)\cos^2 r,$$

eine Gleichung, die man vermittelst Einführung des veränderlichen Parameters φ durch folgende zwei ersetzen kann:

$$1a)\qquad x = z\,tg\,r\cos\varphi,\quad y = z\,tg\,r\sin\varphi.$$

Daher ist die Gleichung einer Ebene, welche durch diejenigen Erzeugenden geht, denen die Parameter φ_1 und φ_2 angehören:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ tg\,r\cos\varphi_1 & tg\,r\sin\varphi_1 & 1 \\ tg\,r\cos\varphi_2 & tg\,r\sin\varphi_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$2)\qquad x\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) + y\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) = z\,tg\,r\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2).$$

Die Gleichung eines zweiten Kegels, der mit dem ersten die Spitze gemeinschaftlich hat, dessen Axe mit der z-Axe den Winkel δ, mit der x-Axe den Winkel $90^0-\delta$ und mit der y-Axe den Winkel 90^0 macht, dessen Erzeugende endlich gegen seine Axe um den constanten Winkel ϱ geneigt sind, ist folgende:

$$3)\qquad (x\sin\delta + z\cos\delta)^2 = (x^2+y^2+z^2)\cos^2\varrho.$$

Die beiden Kegel 1) und 3) erzeugen auf einer Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt in den Anfangspunkt der Coordinaten fällt, zwei kleine Kreise von den sphärischen Radien r und ϱ, deren Mittelpunkte um den Bogen δ von einander entfernt sind, und die Ebene 2) schneidet diese Kugeloberfläche in einem Bogen eines grössten Kreises, der eine Sehne des kleinen Kreises mit dem Radius r ist; dabei ist zu bemerken dass die Parameter φ_1 und φ_2 die beiden Winkel bedeuten, welche die nach den Endpunkten dieser Sehne gerichteten Radien des Kreises r mit dem Verbindungsbogen der Mittelpunkte der Kreise r und ϱ (der Centrale) machen. Soll nun diese Sehne den kleinen Kreis mit dem Radius ϱ berühren oder, was dasselbe ist, die Ebene 2) eine Tangentialebene des Kegels 3) sein, so findet dafür folgende Bedingungsgleichung statt:

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varrho - \sin^2\delta & 0 & -\sin\delta\cos\delta & \cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) \\ 0 & \cos^2\varrho & 0 & \sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sin\delta\cos\delta & 0 & \cos^2\varrho - \cos^2\delta & -tg\,r\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2) \\ \cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) & \sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) & -tg\,r\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{gathered}[\sin\delta\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) - tg\,r\cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)]^2 \\ = [1+tg^2 r\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)]\sin^2\varrho.\end{gathered}$$

Um dieser Gleichung eine für unsern Zweck mehr dienliche Form zu geben, ersetzen wir zunächst die Cosinusse der halben Winkelsummen und Winkeldifferenzen durch ihre ausgeführten Werthe und erhalten so:

$$\begin{gathered}[(tg\,r\cos\delta+\sin\delta)\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1\sin\tfrac{1}{2}\varphi_2 + (tg\,r\cos\delta-\sin\delta)\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2]^2 \\ = [1+tg^2 r(\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2+\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1\sin\tfrac{1}{2}\varphi_2)^2]\sin^2\varrho,\end{gathered}$$

oder nach Ausführung der angezeigten Operationen und neuer Anordnung der Glieder:

$$\begin{aligned}&[(tg\,r\cos\delta+\sin\delta)^2 - tg^2 r\sin^2\varrho]\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_1\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 \\ &+ [(tg\,r\cos\delta-\sin\delta)^2 - tg^2 r\sin^2\varrho]\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi_1\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 \\ &+ 2[(tg^2 r\cos^2\delta-\sin^2\delta) - tg^2 r\sin^2\varrho]\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1\sin\tfrac{1}{2}\varphi_2\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \sin^2\varrho.\end{aligned}$$

Drückt man endlich die Sinusse und Cosinusse der halben Winkel durch ihre Tangenten aus, so nimmt die Bedingungsgleichung schliesslich die Form an:

$$\begin{aligned}&[\sin^2(r+\delta) - \sin^2 r\sin^2\varrho]\,tg^2\tfrac{1}{2}\varphi_1\,tg^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 \\ &+ 2[\sin(r+\delta)\sin(r-\delta) - \sin^2 r\sin^2\varrho]\,tg\tfrac{1}{2}\varphi_1\,tg\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \sin^2(r-\delta) - \sin^2 r\sin^2\varrho \\ &= (1+tg^2\tfrac{1}{2}\varphi_1)(1+tg^2\tfrac{1}{2}\varphi_2)\sin^2\varrho\cos^2 r,\end{aligned}$$

oder, wenn man nach vorgenommener Reduction der Abkürzung halber statt $tg\frac{1}{2}\varphi_1$ und $tg\frac{1}{2}\varphi_2$ t_1 und t_2 schreibt und die Grössen

$$\text{4)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin^2(r+\delta)-\sin^2\varrho}{\sin^2\varrho\cos^2 r} = a, \\ &\frac{\sin^2(r-\delta)-\sin^2\varrho}{\sin^2\varrho\cos^2 r} = b, \\ &2\cdot\frac{\sin(r+\delta)\sin(r-\delta)-\sin^2\varrho\sin^2 r}{\sin^2\varrho\cos^2 r} = c \end{aligned}\right.$$

setzt:

$$\text{5)}\qquad a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2.$$

Legt man daher von irgend einem Punkte der Kreisperipherie r, dessen Parameter φ_1 ist, an den Kreis ϱ eine sphärische Tangente, so erhält man den Parameter des zweiten Schnittpunktes derselben mit dem Kreise r durch die Gleichung 5); legt man ferner von dem Punkte φ_2 in derselben Richtung, in welcher φ_1 und φ_2 gemessen sind, eine zweite sphärische Tangente an den Kreis ϱ, so erhält man den Parameter φ_3 ihres auf dem Kreise r gelegenen Endpunktes durch die ähnlich gebildete Gleichung:

$$a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2.$$

Wenn man so fortfährt und immer vom Endpunkte der letzten Tangente an den Kreis ϱ eine neue Tangente legt, so bekommt man eine Reihe solcher Gleichungen zur Bestimmung der aufeinander folgenden Parameter, so dass endlich der Parameter des Endpunktes der n^{ten} Tangente durch die Gleichung

$$a t_n^2 t_{n+1}^2 + b + c t_n t_{n+1} = t_n^2 + t_{n+1}^2$$

gefunden wird. Wenn der Endpunkt der n^{ten} Tangente mit dem Anfangspunkte der ersten zusammenfällt, so hat man ein geschlossenes Vieleck von n Seiten; die Bedingung dafür, dass dies stattfindet, ist $\varphi_{n+1} = 360^0 + \varphi_1$, und infolge dessen gilt dann für die letzte Seite des Vielecks die Gleichung:

$$a t_n^2 t_1^2 + b + c t_n t_1 = t_n^2 + t_1^2.$$

Wir wollen nun den Anfangspunkt der ersten Tangente auf der Kreisperipherie r um einen unendlich kleinen Bogen $d\varphi_1$ in der Richtung, in der die φ gezählt sind, verschieben, dann verschiebt sich ihr Endpunkt um den unendlich kleinen Bogen $d\varphi_2$, der Endpunkt der zweiten Tangente um $d\varphi_3$ etc., der der n^{ten} um $d\varphi_{n+1}$. Alle diese Incremente haben dasselbe Zeichen, weil mit dem Wachsthum von φ_1 alle übrigen φ wachsen. Um das gegenseitige Verhältniss derselben kennen zu lernen, differentiire man die Gleichung 5) nach φ_1 und φ_2, wodurch man erhält:

$$[2 t_1 (a t_2^2 - 1) + c t_2](1 + t_1^2)\, d\varphi_1 + [2 t_2 (a t_1^2 - 1) + c t_1](1 + t_2^2)\, d\varphi_2 = 0.$$

Durch Auflösung der Gleichung 5) nach t_1 findet man aber:

$$2 t_1 (a t_2^2 - 1) + c t_2 = \pm \sqrt{4 a t_2^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_2^2 + 4b},$$

und durch Auflösung nach t_2:

$$2 t_2 (a t_1^2 - 1) + c t_1 = \pm \sqrt{4 a t_1^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_1^2 + 4b};$$

daher ist:

$$\frac{\sqrt{4 a t_2^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_2^2 + 4b}}{1 + t_2^2}\, d\varphi_1 = \frac{\sqrt{4 a t_1^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_1^2 + 4b}}{1 + t_1^2}\, d\varphi_2,$$

wo die Zeichen rechts und links positiv genommen wurden, weil, wie oben bemerkt, die Incremente $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ dasselbe Zeichen haben müssen. Wenn man die Coefficienten von $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ kurzweg mit f und f_1 bezeichnet, so hat die letzte Gleichung die Gestalt:

$$f_2\, d\varphi_1 = f_1\, d\varphi_2;$$

für das Verhältniss von $d\varphi_2$ und $d\varphi_3$ findet man ebenso: $f_3\, d\varphi_2 = f_2\, d\varphi_3$, für das von $d\varphi_3$ und $d\varphi_4$: $f_4\, d\varphi_3 = f_3\, d\varphi_4$ etc; endlich für das von $d\varphi_n$ und $d\varphi_{n+1}$: $f_{n+1}\, d\varphi_n = f_n\, d\varphi_{n+1}$. Die Multiplication aller dieser Gleichungen ergiebt:

$$f_{n+1}\, d\varphi_1 = f_1\, d\varphi_{n+1};$$

nun ist aber, im Falle das ursprüngliche Vieleck geschlossen war, $f_{n+1} = f_1$, daher ist dann auch $d\varphi_1 = d\varphi_{n+1}$, d. h. der Endpunkt der letzten Tangente fällt auch jetzt wieder mit dem Anfangspunkte der ersten zusammen und man hat ein neues, wiederum geschlossenes Vieleck, das dem Kreise r ein- und dem Kreise ϱ umgeschrieben ist. Indem man den Anfangspunkt der ersten Tangente stetig immer weiter in derselben Richtung auf der Kreisperipherie r fortrücken lässt, werden bei jeder auch endlichen Verrückung dieses Anfangspunktes immer neue geschlossene Vielecke entstehen, so dass man den Satz aussprechen kann:

A. Dreht man ein sphärisches n-Eck, das einem Kugelkreise r eingeschrieben und einem andern Kugelkreise ϱ umgeschrieben ist, so, dass seine n Eckpunkte immer auf der Peripherie des ersten Kreises fortrücken, seine $n-1$ ersten Seiten aber den zweiten Kreis berühren, indem sie sich auf demselben hinwälzen, so berührt auch seine n^{te} Seite fortwährend denselben Kreis.

Dieser Satz gilt in seinem ganzen Umfange auch für die Ebene, weil, wenn man den Radius der Kugeloberfläche bis ins Unendliche wachsen lässt, sich an der ganzen Schlussweise nichts ändert.*

Dagegen gilt nur für die Ebene ein anderer, schon bekannter Satz,** den wir jetzt herleiten wollen. Denken wir uns nämlich den Kreis r in der Ebene als fest und gegeben, dagegen in derselben Ebene eine Schaar von Kreisen mit veränderlichem Radius ϱ, welche mit dem Kreise r dieselbe Potenzlinie haben, so hat man, um die Gleichung der letzteren zu finden, die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad (x-\delta)^2 + y^2 = \varrho^2$$

von einander abzuziehen, was $2\delta x = r^2 + \delta^2 - \varrho^2$ ergiebt; berücksichtigt man aber, dass für diesen Fall die zwei ersten der Gleichungen 4) in $(r+\delta)^2 = \varrho^2(a+1)$ und $(r-\delta)^2 = \varrho^2(b+1)$ übergehen, dass folglich $2(r^2+\delta^2-\varrho^2) = \varrho^2(a+b)$ und $4r\delta = \varrho^2(a-b)$ ist, so erhält die Gleichung der Potenzlinie die Gestalt:

$$(a-b)\,x = (a+b)\,r.$$

---

* Für die Ebene hat den Satz mit Heranziehung der elliptischen Functionen bewiesen Jacobi in Crelle's Journal Bd. 3. Vergl. Durège, Theorie der ellipt. Funct., 2. Aufl., S. 181.

** Vergl. Durège a. a. O. S. 180.

Man kann daher die Forderung, dass die Potenzlinie für die ganze Schaar von Kreisen dieselbe sein solle, in die Form kleiden: das Verhältniss $a:b$ solle constant sein, wenn auch die a und b selbst für jeden Kreis der Schaar verschiedene Werthe haben. Legen wir nun von irgend einem Punkte der Kreisperipherie r, dessen Parameter φ_1 ist, an einen Kreis dieser Schaar eine Tangente, so finden wir den Parameter ihres Endpunktes auf dem Kreise r, wie oben, durch die Gleichung 5):

$$a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2.$$

Der Parameter des Endpunktes einer zweiten Tangente, die man vom Endpunkte der ersten an einen andern beliebigen Kreis der Schaar legt, wird erhalten durch die Gleichung:

$$a' t_2^2 t_3^2 + b' + c' t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2 \text{ u. s. w.}$$

Indem man nun den Anfangspunkt der ersten Tangente unendlich wenig verschiebt und sonst dieselbe Schlussweise anwendet, wie oben, erhält man nacheinander die Differentialgleichungen:

$$\frac{\sqrt{4 a t_2^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_2^2 + 4b}}{1 + t_2^2} d\varphi_1 = \frac{\sqrt{4 a t_1^4 + (c^2 - 4ab - 4) t_1^2 + 4b}}{1 + t_1^2} d\varphi_2,$$

$$\frac{\sqrt{4 a' t_3^4 + (c'^2 - 4a'b' - 4) t_3^2 + 4b'}}{1 + t_3^2} d\varphi_2$$

$$= \frac{\sqrt{4 a' t_2^4 + (c'^2 - 4a'b' - 4) t_2^2 + 4b'}}{1 + t_2^2} d\varphi_3 \text{ u. s. w.}$$

Nun geht aber für die Ebene die dritte der Gleichungen 4) über in: $2(r^2 - \delta^2) = \varrho^2 c$, was mit den zwei anderen schon oben gebrauchten: $(r+\delta)^2 = \varrho^2(a+1)$ und $(r-\delta)^2 = \varrho^2(b+1)$ die Relation giebt: $c^2 = 4(a+1)(b+1)$, aus welcher $c^2 - 4ab - 4 = 4(a+b)$ folgt. Dividirt man daher diese Differentialgleichungen der Reihe nach mit b, b' u. s. w. und bezeichnet das Verhältniss $a:b = a':b'$ u. s. w. mit λ, ferner einen Ausdruck wie $\dfrac{\sqrt{4\lambda t_k^4 + 4(\lambda+1) t_k^2 + 4b}}{1 + t_k^2}$ mit f_k, so hat man auch hier wieder $f_2\, d\varphi_1 = f_1\, d\varphi_2$, $f_3\, d\varphi_2 = f_2\, d\varphi_3$ u. s. w. und zuletzt $f_{n+1}\, d\varphi_n = f_n\, d\varphi_{n+1}$, woraus durch Multiplication, wie oben, $f_{n+1}\, d\varphi_1 = f_1\, d\varphi_{n+1}$ folgt. Hat man aber vom Endpunkte der vorletzten Tangente eine Verbindungslinie nach dem Anfang der ersten gezogen, so dass das Vieleck sich schliesst, so wird auch diese nothwendig irgend einen Kreis der Schaar berühren und man wird haben: $f_{n+1} = f_1$, folglich auch $d\varphi_1 = d\varphi_{n+1}$, d. h. der Endpunkt der letzten Tangente fällt auch jetzt wieder mit dem Anfangspunkt der ersten zusammen, und es gilt der Satz:

B. Wenn in der Ebene ein fester Kreis mit dem Radius r und eine Schaar von Kreisen mit dem veränderlichen Radius ϱ gegeben sind, welche alle mit dem Kreise r dieselbe Potenzlinie besitzen, und man legt von irgend einem Punkte des ersten Kreises an einen beliebigen Kreis der Schaar eine Tangente, von ihrem Endpunkte an einen zweiten Kreis der Schaar eine zweite Tangente und so fort, so wird die Verbindungslinie des Endpunktes der letzten Tangente mit dem Anfangspunkte der ersten immer denselben Kreis der Schaar berühren, wenn man auch das dadurch entstandene Vieleck sich so drehen lässt, dass seine Eckpunkte auf der Peripherie des Kreises r fortrücken und die $n-1$ ersten Seiten desselben fortwährend dieselben Kreise der Schaar berühren.

Für die Kugel lässt sich ein ähnlicher Satz nicht aufstellen. Denn sollte obige Schlussweise auch hier zulässig sein, so müsste sich erstens die Grösse $c^2-4ab-4$ durch eine mit a oder b multiplicirte Function von $a:b$ ausdrücken lassen, und zweitens müsste die Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit alle Kreise der Schaar mit dem Kreise r dieselbe Potenzlinie besitzen, eine Function von $a:b$ allein sein. Keines von beiden ist der Fall. Die oben Gleichung 4) gegebenen Werthe von a, b, c liefern nämlich:

$$(a\cos^2 r+1)\sin^2\varrho=\sin^2(r+\delta),\quad (b\cos^2 r+1)\sin^2\varrho=\sin^2(r-\delta)$$

und

$$(c\cos^2 r+2\sin^2 r)\sin^2\varrho=2\sin(r+\delta)\sin(r-\delta);$$

daraus folgt:

$$4(a\cos^2 r+1)(b\cos^2 r+1)=[(c-2)\cos^2 r+2]^2$$

und daraus

$$c-2=-2(1+tg^2 r)\pm 2\sqrt{(a+1+tg^2 r)(b+1+tg^2 r)}.$$

Dies giebt endlich:

$$c^2-4ab-4=4(a+b+2\,tg^2 r)\pm 8\,tg^2 r\sqrt{(a+1+tg^2 r)(b+1+tg^2 r)}.$$

Um die Gleichung des Potenzkreises zu finden, müssen wir aus den Gleichungen 1) und 3) die Grösse $x^2+y^2+z^2$ eliminiren, wodurch man $z^2\cos^2\varrho=(x\sin\delta+z\cos\delta)^2\cos^2 r$ oder $x\sin\delta\cos r=z(-\cos\delta\cos r\pm\cos\varrho)$ erhält, d. h. die Gleichungen zweier grössten Kreise der Kugel. Es lässt sich leicht zeigen, dass der erste derselben, für den das positive Zeichen gilt, die Eigenschaft besitzt, dass die von einem beliebigen Punkte desselben an die Kreise r und ϱ gelegten sphärischen Tangenten einander gleich sind, während die von einem Punkte des zweiten an den Kreis r und den Gegenkreis von ϱ gezogenen Tangenten gleich sind. In der That, sind

$$x\sin\delta\cos r=z(-\cos\delta\cos r+\cos\varrho)$$

und

$$y\sin\delta\cos r=\lambda z(-\cos\delta\cos r+\cos\varrho)$$

die Gleichungen der geraden Linie, die man vom Ursprung nach einem Punkte des ersten Potenzkreises gezogen hat, so findet man den Winkel k, welchen diese Gerade mit der z-Axe macht, durch die Gleichung:

$$\cos k = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2(\lambda^2+1)}},$$

wo $-\cos\delta\cos r + \cos\varrho = \mu\sin\delta\cos r$ gesetzt ist; dagegen wird der Winkel $\varkappa$, den dieselbe Gerade mit dem Kugelradius nach dem Mittelpunkte des Kreises ϱ macht, bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos\varkappa = \frac{1+\mu\, tg\,\delta}{\sqrt{1+\mu^2(\lambda^2+1)}\,.\sqrt{1+tg^2\delta}} = \frac{\cos\delta+\mu\sin\delta}{\sqrt{1+\mu^2(\lambda^2+1)}}.$$

Bedeutet nun t die Länge der von jenem Punkte des ersten Potenzkreises an den Kreis r, und τ die Länge der von demselben Punkte an den Kreis ϱ gezogenen sphärischen Tangente, so ist nach einem für rechtwinklige Dreiecke geltenden Satze der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos k = \cos r\cos t \quad \text{und} \quad \cos\varkappa = \cos\varrho\cos\tau,$$

also $(\cos\delta+\mu\sin\delta)\cos r\cos t = \cos\varrho\cos\tau$ oder, wenn man die Gleichung $-\cos\delta\cos r+\cos\varrho = \mu\sin\delta\cos r$ heranzieht:

$$\cos t = \cos\tau,$$

woraus die erste Behauptung unmittelbar folgt. Nimmt man statt des Kreises ϱ einen andern mit dem Radius $\varrho' = 180^0 - \varrho$, so ist die Gleichung seines ersten Potenzkreises: $x\sin\delta\cos r = z(-\cos\delta\cos r + \cos\varrho')$ oder $x\sin\delta\cos r = z(-\cos\delta\cos r - \cos\varrho)$, d. h. die Gleichung des ersten Potenzkreises der Kreise r und ϱ' ist identisch mit der Gleichung des zweiten Potenzkreises der Kreise r und ϱ, womit die zweite Behauptung erwiesen ist.

Wenn also eine Schaar von Kreisen mit dem Kreise r den ersten Potenzkreis, der hier allein in Betracht kommt, gemeinschaftlich hat, so muss, weil für einen constanten Werth von p auch $p\, tg\, r$ eine Constante ist,

$$(p\, tg\, r\sin\delta + \cos\delta)\cos r = \cos\varrho$$

sein. Nun ist aber $\frac{a}{b} = \frac{\sin^2(r+\delta)-\sin^2\varrho}{\sin^2(r-\delta)-\sin^2\varrho}$, woraus $\sin^2\varrho = \sin^2 r\cos^2\delta + \cos^2 r\sin^2\delta - 2\frac{a+b}{a-b}\sin r\cos r\sin\delta\cos\delta$ folgt. Daher muss:

$$[p\, tg\, r\sin\delta+\cos\delta]^2\cos^2 r$$
$$= 1 - \left[\sin^2 r\cos^2\delta + \cos^2 r\sin^2\delta - 2\cdot\frac{a+b}{a-b}\sin r\cos r\sin\delta\cos\delta\right]$$

oder

$$[p\, tg\, r\, tg\,\delta+1]^2 = (1+tg^2 r)(1+tg^2\delta) - \left[tg^2 r + tg^2\delta - 2\frac{a+b}{a-b}tg\, r\, tg\,\delta\right]$$

oder endlich

$$[p\, tg\, r\, tg\,\delta+1]^2 = 1 + tg^2 r\, tg^2\delta + 2\frac{a+b}{a-b}tg\, r\, tg\,\delta$$

sein. Wenn man entwickelt und den Factor $tg\,\delta$ weghebt, so wird daraus:

$$2[p(a-b)-(a+b)] = (a-b)(1-p^2)\, tg\, r\, tg\,\delta.$$

Es ist aber weiter: $(a-b)\sin^2\varrho\cos^2 r = \sin^2(r+\delta) - \sin^2(r-\delta)$ und $(a+b-c+2)\sin^2\varrho\cos^2 r = [\sin(r+\delta) - \sin(r-\delta)]^2$; daher kommt durch Division:

$$\frac{a-b}{a+b-c+2} = \frac{\sin(r+\delta) + \sin(r-\delta)}{\sin(r+\delta) - \sin(r-\delta)} = tg\, r\, cotg\, \delta,$$

also

$$2[p(a-b) - (a+b)] = (a+b-c+2)(1-p^2)\, tg^2 r$$

oder, wenn man für $a+b-c+2$ seinen oben gefundenen Werth setzt:

$$2[p(a-b) - (a+b)]$$
$$= \left[a+b+2(1+tg^2 r) \pm 2\sqrt{(a+1+tg^2 r)(b+1+tg^2 r)}\right](1-p^2)\, tg^2 r.$$

Das ist also die Bedingung, dass eine Schaar von Kreisen mit veränderlichem Radius ϱ zugleich mit dem festen Kreise r eine gemeinschaftliche Potenzlinie besitzt, ausgedrückt als Function von a und b. Daraus ersieht man sofort, dass sie nicht von dem Verhältniss der Grössen a und b abhängig ist, woraus, verbunden mit der Form des Ausdrucks, den wir für $c^2 - 4ab - 4$ gefunden haben, folgt, dass der Satz B für die Kugel nicht gilt.

Unter den Vielecken, welche dem Kreise r ein- und dem Kreise ϱ umgeschrieben sind, besitzen die von gerader Seitenzahl einige besondere Eigenschaften; für ebene Vielecke findet man eine derselben entwickelt und ausgesprochen bei Durège a. a. O. S. 183 (vergl. unten Satz C).

Für ein $2n$-Eck nämlich gelten folgende $2n$ Gleichungen, die ähnlich der Gleichung 5) gebildet sind:

$$\begin{aligned}
a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 &= t_1^2 + t_2^2,\\
a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 &= t_2^2 + t_3^2,\\
&\;\;\vdots\\
a t_{2n}^2 t_1^2 + b + c t_{2n} t_1 &= t_{2n}^2 + t_1^2.
\end{aligned}$$

Eliminirt man aus der $(n+1)^{\text{ten}}$ dieser Gleichungen und der ersten, der $(n+2)^{\text{ten}}$ und der zweiten u. s. w. die Grösse c, so erhält man die n neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(b - a t_1 t_2 t_{n+1} t_{n+2})(t_{n+1} t_{n+2} - t_1 t_2) &= (t_1 t_{n+1} - t_2 t_{n+2})(t_1 t_{n+2} - t_2 t_{n+1}),\\
(b - a t_2 t_3 t_{n+2} t_{n+3})(t_{n+2} t_{n+3} - t_2 t_3) &= (t_2 t_{n+2} - t_3 t_{n+3})(t_2 t_{n+3} - t_3 t_{n+2}),\\
&\;\;\vdots\\
(b - a t_n t_{n+1} t_{2n} t_1)(t_{2n} t_1 - t_n t_{n+1}) &= (t_n t_{2n} - t_{n+1} t_1)(t_n t_1 - t_{n+1} t_{2n}).
\end{aligned}$$

Man kann diesen n Gleichungen zugleich dadurch Genüge thun, dass man

$$t_1 t_{n+2} = t_2 t_{n+1}, \quad t_2 t_{n+3} = t_3 t_{n+2}, \quad \ldots \quad t_n t_1 = t_{n+1} t_{2n}$$

setzt. Denn das Product aller dieser Relationen ist: $t_1^2 = t_{n+1}^2$, woraus $t_1 = \pm t_{n+1}$ folgt. Nimmt man das positive Zeichen, also $t_1 = t_{n+1}$, so folgt aus der ersten Relation $t_2 = t_{n+2}$, dann aus der dritten $t_3 = t_{n+3}$ etc.;

infolge dessen sind auch die auf der rechten Seite obiger Gleichungen vorkommenden zweiten Factoren gleich Null. Wählt man aber das negative Zeichen, nämlich $t_1 = -t_{n+1}$, so erhält man ebenso nacheinander: $t_2 = -t_{n+2}$, $t_3 = -t_{n+3}$ etc., und die erwähnten Factoren werden auch jetzt wieder Null. Aber obgleich die genannten Relationen obige Gleichungen in beiden Fällen identisch erfüllen, so darf man sie doch nicht als wirklich bestehend ansehen; denn im ersten Falle müsste $\varphi_1 = 360^0 + \varphi_{n+1}$, $\varphi_2 = 360^0 + \varphi_{n+2}$ etc. sein, d. h. die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks müssten zusammenfallen, im zweiten Falle aber müsste $\varphi_1 = 360^0 - \varphi_{n+1}$, $\varphi_2 = 360^0 - \varphi_{n+2}$ etc. sein, d. h. die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks müssten symmetrisch liegen gegen die Centrale, was ebenfalls unmöglich ist.

Dem gegenüber müssen wir uns nach anderen Relationen unter den t umsehen, welche obige Gleichungen erfüllen; solche erhält man aber durch Nullsetzen der ersten Factoren auf der rechten Seite der genannten Gleichungen, so dass

$$t_1 t_{n+1} = t_2 t_{n+2} = t_3 t_{n+3} = \ldots = t_n t_{2n} = \lambda,$$

wo λ eine Constante bedeutet. In der That gehen dadurch die genannten Gleichungen über in:

$$\begin{aligned}
(b - a\lambda^2)(\lambda^2 - t_1^2 t_2^2) &= 0, \\
(b - a\lambda^2)(\lambda^2 - t_2^2 t_3^2) &= 0, \\
&\;\vdots \\
(b - a\lambda^2)(\lambda^2 - t_n^2 t_{n+1}^2) &= 0;
\end{aligned}$$

die zweiten Factoren auf der linken Seite können nicht zugleich Null sein, weil sonst $t_1^2 = t_3^2$, $t_2^2 = t_4^2$, $t_3^2 = t_5^2$, $\ldots$ $t_{n-1}^2 = t_{n+1}^2$ folgen würde, was nicht möglich ist. Man hat daher den ersten Factor auf der rechten Seite $= 0$ zu setzen, also

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{b}{a}},$$

damit die Gleichungen vollständig erfüllt werden. Demzufolge bestehen für jedes Vieleck von gerader Seitenzahl die Relationen:

$$6)\qquad t_1^2 t_{n+1}^2 = t_2^2 t_{n+2}^2 = t_3^2 t_{n+3}^2 = \ldots = t_n^2 t_{2n}^2 = \frac{b}{a}.$$

Bei der Radicirung hat man das positive Zeichen zu nehmen, wenn die Kreise r und ϱ sich nicht einschliessen; im andern Falle das negative.

Nun ist die Gleichung einer Diagonale, welche die gegenüberliegenden Eckpunkte von den Parametern k und $n+k$ verbindet, nach Gleichung 2):

$$x \cos \tfrac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{n+k}) + y \sin \tfrac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{n+k}) = z\, tg\, r \cos \tfrac{1}{2}(\varphi_k - \varphi_{n+k})$$

oder, nach t_k und t_{n+k} entwickelt:

$$x(1-t_k t_{n+k})+y(t_k+t_{n+k})=z\,tg\,r(1+t_k t_{n+k}).$$

Ersetzt man hier t_{n+k} durch $-\frac{1}{t_k}\sqrt{\frac{b}{a}}$, so erhält man:

$$x+y\frac{t_k^2\sqrt{a}-b}{t_k^2\sqrt{a}+b}=z\,tg\,r\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Da, wie man sieht, die Gleichungen aller Diagonalen sich nur durch den Coefficienten von y unterscheiden, so schneiden sich alle in einem Punkte p_1 der Kugeloberfläche, dessen Coordinaten

$$7)\qquad y_1=0 \quad \text{und} \quad x_1=z_1\,tg\,r\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

also unabhängig von den t sind. Daraus folgt der Satz:

C. Die Verbindungsbögen gegenüberliegender Ecken eines sphärischen Vielecks von gerader Seitenzahl, das einem festen Kreise r eingeschrieben und einem festen Kreise ϱ umgeschrieben ist, schneiden sich in einem Punkte, welcher unverändert derselbe bleibt, wenn man auch das Polygon verschiebt, sobald nur seine Ecken auf der Peripherie des Kreises r bleiben und seine Seiten den Kreis ϱ berühren.*

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen: den Schnittpunkt zweier gegenüberliegenden Seiten des Vielecks zu finden. Die Gleichung der Seite k, $k+1$ ist:

$$x(1-t_k t_{k+1})+y(t_k+t_{k+1})=z\,tg\,r(1+t_k t_{k+1}),$$

und die der Seite $n+k$, $n+k+1$:

$$x(1-t_{n+k}t_{n+k+1})+y(t_{n+k}+t_{n+k+1})=z\,tg\,r(1+t_{n+k}t_{n+k+1}).$$

Durch die Substitution $t_{n+k}=-\frac{1}{t_k}\sqrt{\frac{b}{a}}$ und $t_{n+k+1}=-\frac{1}{t_{k+1}}\sqrt{\frac{b}{a}}$ geht letztere über in:

$$x(a t_k t_{k+1}-b)-y(t_k+t_{k+1})\sqrt{ab}=z\,tg\,r(a t_k t_{k+1}+b).$$

Für den Schnittpunkt erhält man demnach nach leichter Rechnung:

$$x=z\,tg\,r\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\quad y=2z\,tg\,r\frac{t_k t_{k+1}\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(t_k+t_{k+1})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Da die Gleichung zwischen x und z die Grössen t_k und t_{k+1} nicht mehr enthält, so liegen die Schnittpunkte irgend zweier gegenüberliegenden Seiten auf einem und demselben grössten Kreise, dessen Schnittpunkt p_2 mit der Centrale der Kreise r und ϱ bestimmt wird durch die Gleichungen:

* Für ebene Vielecke findet sich, wie schon oben bemerkt, dieser Satz entwickelt bei Durège a. a. O. S. 183.

8) $$y_2 = 0 \text{ und } x_2 = z_2 \, tg\, r \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Wenn man den Quotienten $x_1 : z_1$ in Gleichung 7) mit $tg\, e_1$ und den Quotienten $x_2 : z_2$ in Gleichung 8) mit $tg\, e_2$ bezeichnet, so hat man durch Multiplication:

$$tg\, e_1 \, tg\, e_2 = tg^2 r,$$

woraus man schliesst, dass die Punkte p_1 und p_2 den auf der Centrale liegenden Durchmesser des Kreises r harmonisch theilen, oder dass der durch p_2 gehende grösste Kreis in Bezug auf den Punkt p_1 dieselbe Rolle spielt, wie in der Ebene die Polare in Bezug auf den Pol; daher gehen bekanntlich die Berührungssehnen aller von irgendwelchen Punkten dieses Polarkreises an den Kreis r gelegten Tangentenpaare durch den Pol p_1.

Wir können ferner noch die Frage aufwerfen, welcher Punkt p der harmonische Pol des durch p_2 gehenden grössten Kreises in Bezug auf den Kreis ϱ sei, oder welcher Punkt p zugleich mit p_2 den auf der Centrale liegenden Durchmesser des Kreises ϱ harmonisch theile. Nennen wir den Winkel, den der nach diesem Punkte gerichtete Kugelradius mit der z-Axe bildet, e, so muss demgemäss:

$$tg(e-\delta)\, tg(e_2-\delta) = tg^2 \varrho$$

sein, wo

$$tg\, e_2 = tg\, r \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \quad \text{also} \quad tg(e_2-\delta) = \frac{tg\, r(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - tg\,\delta(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+tg\, r\, tg\,\delta(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

ist. Es ist aber:

$$\frac{a}{b} = \frac{sin^2(r+\delta) - sin^2\varrho}{sin^2(r-\delta) - sin^2\varrho} = \frac{(tg\, r + tg\,\delta)^2(1+tg^2\varrho) - tg^2\varrho(1+tg^2 r)(1+tg^2\delta)}{(tg\, r - tg\,\delta)^2(1+tg^2\varrho) - tg^2\varrho(1+tg^2 r)(1+tg^2\delta)},$$

oder anders geordnet:

$$\frac{a}{b} = \frac{(tg\, r+tg\,\delta)^2 - (1-tg\, r\, tg\,\delta)^2\, tg^2\varrho}{(tg\, r-tg\,\delta)^2 - (1+tg\, r\, tg\,\delta)^2\, tg^2\varrho}.$$

Dies giebt:

$$tg^2\varrho = \frac{a(tg\, r - tg\,\delta)^2 - b(tg\, r + tg\,\delta)^2}{a(1+tg\, r\, tg\,\delta)^2 - b(1-tg\, r\, tg\,\delta)^2}$$

oder, wenn man die Differenzen im Zähler und Nenner der rechten Seite in Producte zerlegt:

$$tg^2\varrho = \frac{\left[(tg\, r-tg\,\delta)\sqrt{a}-(tg\, r+tg\,\delta)\sqrt{b}\right]\left[(tg\, r-tg\,\delta)\sqrt{a}+(tg\, r+tg\,\delta)\sqrt{b}\right]}{\left[(1+tg\, r\, tg\,\delta)\sqrt{a}+(1-tg\, r\, tg\,\delta)\sqrt{b}\right]\left[(1+tg\, r\, tg\,\delta)\sqrt{a}-(1-tg\, r\, tg\,\delta)\sqrt{b}\right]};$$

durch andere Anordnung der Glieder auf der rechten Seite bekommt diese Gleichung schliesslich die Gestalt:

$$tg^2\varrho = \frac{tg\, r(\sqrt{a}-\sqrt{b}) - tg\,\delta(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+tg\, r\, tg\,\delta(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{tg\, r(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - tg\,\delta(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+tg\, r\, tg\,\delta(\sqrt{a}+\sqrt{b})}.$$

Der zweite Factor rechts ist, wie oben bemerkt, gleich $tg(e_2-\delta)$, also ist:

$$tg(e-\delta)=\frac{tg\,r\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})-tg\,\delta\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+tg\,r\,tg\,\delta(\sqrt{a}-\sqrt{b})},\ \text{d. h.}\ tg\,e=tg\,r\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

womit bewiesen ist, dass der Punkt p mit dem Punkte p_1, dem Schnittpunkte der Diagonalen, zusammenfällt.

Die beiden Punkte p_1 und p_2 theilen daher sowohl den auf der Centrale liegenden Durchmesser des Kreises r, als auch den ebenso liegenden Durchmesser des Kreises ϱ harmonisch, oder sie sind die Doppelpunkte der von den Endpunkten dieser Durchmesser auf der Centrale gebildeten Involution; infolge dessen ist der durch p_2 gehende grösste Kreis der Polarkreis des Punktes p_1 auch in Bezug auf den Kreis ϱ, oder die Berührungssehnen je zweier von irgend einem Punkte dieses Polarkreises an den Kreis ϱ gelegten Tangenten, folglich auch die Verbindungsbögen der Berührungspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in dem Punkte p_1, dem nämlichen Punkte also, in dem sich auch die Verbindungsbögen je zweier gegenüberliegenden Ecken schneiden, und zwar findet dies Alles statt unabhängig von den verschiedenen Werthen, welche die t annehmen können, also auch dann, wenn man das Vieleck in der oben angegebenen Weise verschiebt. Weil wir bei unserer Untersuchung jedesmal die Substitution $t_{n+k}=-\frac{1}{t_k}\sqrt{\frac{b}{a}}$ gebrauchten, die nur dann gilt, wenn der Kreis r den Kreis ϱ einschliesst, so sind vorerst die gewonnenen Resultate auch nur in diesem Falle richtig; wenn aber die Kreise r und ϱ auseinanderliegen, man also für t_{n+k} das positive Zeichen wählen muss, so hat dies nur die Folge, dass die sphärischen Abscissen der Punkte p_1 und p_2 ihre algebraischen Werthe vertauschen, ohne dass die Eigenschaften dieser Punkte selbst sich ändern: der innerhalb des Kreises r liegende Doppelpunkt der Involution bleibt auch jetzt noch Schnittpunkt der Verbindungsbögen je zweier gegenüberliegenden Ecken des Vielecks sowohl, als des Vielecks der Berührungspunkte; der ausserhalb liegende bestimmt den grössten Kreis, auf dem die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Vielecks liegen. Weil aber der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Verbindungsbögen je zweier gegenüberliegenden Ecken des Vielecks der Berührungspunkte der Punkt p_1 ist, so müssen nothwendig die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Vielecks der Berührungspunkte auf dem grössten Kreise liegen, der durch den diesem harmonisch zugeordneten Punkt, nämlich den Punkt p_2 bestimmt wird. Das Gesammtergebniss unserer Untersuchung enthält folgender Satz:

D. Für ein sphärisches Vieleck von gerader Seitenzahl, das einem festen Kreise r eingeschrieben und einem festen Kreise ϱ umgeschrieben ist, sind die Doppelpunkte der von den Endpunkten der Durchmesser beider Kreise auf der Centrale gebildeten Involution zwei merkwürdige Punkte, von denen der erste, innerhalb des Kreises r liegende die Eigenschaft besitzt, dass die Verbindungsbögen je zweier gegenüberliegenden Eckpunkte sowohl des Vielecks, als auch des Vielecks der Berührungspunkte durch ihn hindurchgehen, während der zweite, ausserhalb des Kreises r liegende einen grössten Kreis bestimmt, auf dem die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten sowohl des Vielecks, als des Vielecks der Berührungspunkte sich befinden. Alles dies bleibt unverändert, auch wenn man das Vieleck so verschiebt, dass seine Eckpunkte auf dem Kreise r bleiben und seine Seiten fortwährend den Kreis ϱ berühren.

Wenn in den festen Kreis r ein sphärisches Vieleck von bestimmter Seitenzahl eingeschrieben werden soll, dessen Seiten einen andern Kreis mit dem Radius ϱ berühren, so muss zwischen den Grössen r, δ und ϱ eine gewisse Relation bestehen, die, wie aus Satz A erhellt, unabhängig ist von den Werthen der Parameter der Eckpunkte des Vielecks. Man könnte dieselbe dadurch erhalten, dass man aus den n Gleichungen:

$$\begin{gathered} a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2, \\ a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a t_n^2 t_1^2 + b + c t_n t_1 = t_n^2 + t_1^2 \end{gathered}$$

die Grössen t_2, t_3, ... t_n eliminirte, wodurch man eine Endgleichung bekäme, die nur noch t_1 enthielte. Wegen der Willkürlichkeit von t_1 müssten aber sämmtliche Coefficienten dieser Gleichung gleich Null sein, also einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, der, gleich Null gesetzt, die fragliche Relation lieferte. Für ein Dreieck hat man beispielshalber die drei Gleichungen:

$$\begin{gathered} a t_1^2 t_2^2 + b + c t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2, \\ a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \\ a t_3^2 t_1^2 + b + c t_3 t_1 = t_3^2 + t_1^2. \end{gathered}$$

Die Elimination von t_3 aus den beiden letzten Gleichungen giebt das Resultat:

$$[a c^2 t_1^2 - (ab-1)^2]\, t_2^2 + [(ab+1)c^2 - 2(ab-1)^2]\, t_1 t_2 + b c^2 - (ab-1)^2 t_1^2 = 0.$$

Schreibt man die erste Gleichung in der Form:

$$(a t_1^2 - 1)\, t_2^2 + c t_1 t_2 + b - t_1^2 = 0,$$

so erhält man durch Elimination von t_2 aus dieser und der vorhergehenden Gleichung:

$$\begin{vmatrix} act_1^2-(ab-1)^2 & 0 & at_1^2-1 & 0 \\ (ab+1)c^2-2(ab-1)^2 & act_1^2-(ab-1)^2 & c & at_1^2-1 \\ bc^2-(ab-1)^2t_1^2 & (ab+1)c^2-2(ab-1)^2 & b-t_1^2 & c \\ 0 & bc^2-(ab-1)^2t_1^2 & 0 & b-t_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus dieser Determinante kann man den Factor $ab-1-c$ ausscheiden; denn sie wird identisch gleich Null, wenn man $ab-1=c$ setzt, weil dann zwei Vertikalreihen, nachdem man sie durch c^2 dividirt hat, den beiden anderen Vertikalreihen gleich werden. Also ist $ab-1=c$ die verlangte Relation.

Es würde jedoch, wie man an diesem Beispiele sieht, zu sehr unerquicklichen Rechnungen führen, wenn man in dieser Weise auch die Relationen für Vielecke höherer Seitenzahl entwickeln wollte. Da bietet nun aber der Satz A ein willkommenes Mittel, um die aufzuwendende Mühe ganz bedeutend zu verringern. Weil nämlich darnach die fragliche Relation bei jeder Lage des Vielecks, d. h. bei jedem Werthe des Anfangsparameters φ_1 gelten muss, so kann man auch dem φ_1 den speciellen Werth Null geben, wodurch bewirkt wird, dass die übrigen Ecken des Vielecks eine symmetrische Lage gegen die Centrale annehmen. Für ein Vieleck von gerader Seitenzahl $2n$ wird nämlich dann: $\varphi_2 = 360^0 - \varphi_{2n}$, $\varphi_3 = 360^0 - \varphi_{2n-1}$ ... etc. und endlich $\varphi_{n+1} = 360^0 - \varphi_{n+1}$ oder $\varphi_{n+1} = 180^0$, und infolge dessen: $t_{2n} = -t_2$, $t_{2n-1} = -t_3$ ... etc. und endlich $t_{n+1} = \infty$; für ein Vieleck von ungerader Seitenzahl $2n+1$ aber hat man dann: $\varphi_2 = 360^0 - \varphi_{2n+1}$, $\varphi_3 = 360^0 - \varphi_{2n}$ ... etc. und endlich $\varphi_{n+1} = 360^0 - \varphi_{n+2}$, und infolge dessen: $t_{2n+1} = -t_2$, $t_{2n} = -t_3$ ... etc. und endlich $t_{n+2} = -t_{n+1}$. Wenn man zunächst in die $2n$ für ein Vieleck von gerader Seitenzahl geltenden Gleichungen die eben für die t gefundenen Werthe substituirt, so werden die n letzten Gleichungen identisch mit den n ersten und man hat deshalb die n Gleichungen:

$$9)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& t_2^2, \\ at_2^2t_3^2 + b + ct_2t_3 &=& t_2^2 + t_3^2, \\ at_3^2t_4^2 + b + ct_3t_4 &=& t_3^2 + t_4^2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot && \cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot && \cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot && \cdot\quad\cdot \\ at_{n-1}^2t_n^2 + b + ct_{n-1}t_n &=& t_{n-1}^2 + t_n^2, \\ at_n^2 &=& 1. \end{array} \right.$$

Ebenso erhält man für ein Vieleck von $2n+1$ Seiten die $n+1$ Gleichungen:

$$10)\qquad \left\{\begin{array}{l} b = t_2^2, \\ a\,t_2^2 t_3^2 + b + c\,t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \\ a\,t_3^2 t_4^2 + b + c\,t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2, \\ \quad \cdot \qquad , \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ a\,t_n^2 t_{n+1}^2 + b + c\,t_n t_{n+1} = t_n^2 + t_{n+1}^2, \\ a\,t_{n+1}^4 + b - c\,t_{n+1}^2 = 2\,t_{n+1}^2. \end{array}\right.$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen kann man noch einen merkwürdigen Schluss ziehen. Substituirt man nämlich aus der ersten der Gleichungen 9) den Werth von t_2 in die zweite, so erhält man:

$$a\,b\,t_3^2 + b + c\sqrt{b}\,t_3 = b + t_3^2 \quad \text{oder} \quad (a\,b - 1)\,t_3 + c\sqrt{b} = 0.$$

Wenn man daher mit f_k kurzweg eine Function der beiden Grössen ab und c bezeichnet, so ist $t_3 = f_0\sqrt{b}$. Dies in die dritte der Gleichungen 9) substituirt, giebt: $a\,b\,f_0^2\,t_4^2 + b + c\,f_0\sqrt{b}\,t_4 = f_0^2\,b + t_4^2$, woraus $t_4 = \sqrt{b}$ $\times \dfrac{-c f_0 \pm \sqrt{c^2 f_0^2 - 4(1-f_0^2)(a b f_0^2 - 1)}}{2(a b f_0^2 - 1)}$, d. h. wieder eine mit $\sqrt{b}$ multiplicirte Function von ab und c folgt, so dass man setzen kann: $t_4 = f_1\sqrt{b}$; dann folgt in der nämlichen Weise $t_5 = f_2\sqrt{b}$ etc.; die letzte Gleichung giebt dann aber $a\,b\,f_{n-3}^2 = 1$ als verlangte Relation, die sich demnach als eine Function der beiden Grössen ab und c ausweist. Setzt man den in der nämlichen Weise aus der vorletzten der Gleichungen 10) gewonnenen Werth von t_{n+1}, nämlich $f_{n-2}\sqrt{b}$ in die letzte, so entsteht: $a\,b^2\,f_{n-2}^4 + b - c\,b\,f_{n-2}^2 = 2\,b\,f_{n-2}^2$ oder nach der Division mit b: $a\,b\,f_{n-2}^4 + 1 - c\,f_{n-2}^2 = 2\,f_{n-2}^2$ als verlangte Relation, die also ebenfalls eine Function der beiden Grössen ab und c ist. Man kann diese beiden Resultate in den Satz zusammenfassen:

E. **Die für irgend ein sphärisches Vieleck von bestimmter Seitenzahl, das einem Kreise mit dem Radius r eingeschrieben und einem Kreise ϱ umgeschrieben ist, geltende Relation zwischen r, ϱ und δ ist eine Function der beiden Grössen**

$$a\,b = \frac{\sin(r+\delta+\varrho)\,\sin(r+\delta-\varrho)\,\sin(r-\delta+\varrho)\,\sin(r-\delta-\varrho)}{\sin^4\varrho\,\cos^4 r}$$

und

$$c = \frac{2(\sin^2 r\,\cos^2\varrho - \sin^2\delta)}{\sin^2\varrho\,\cos^2 r}.$$

Wenn man von der Kugel zur Ebene übergeht, so bleibt der eben geschilderte Bau der Relationen derselbe, nur hat man

$$\frac{(r+\delta+\varrho)(r+\delta-\varrho)(r-\delta+\varrho)(r-\delta-\varrho)}{\varrho^4} \quad \text{oder} \quad \frac{[(r+\varrho)^2-\delta^2]\,[(r-\varrho)^2-\delta^2]}{\varrho^4}$$

statt ab und $\frac{2(r^2-\delta^2)}{\varrho^2}$ statt c zu setzen. Nun lässt sich aber das Product ab für die Kugel auch auf die Form:

$$\frac{[\sin^2(r+\varrho)-\sin^2\delta][\sin^2(r-\varrho)-\sin^2\delta]}{\sin^4\varrho\cos^4 r}$$

$$=\frac{\{[\sin r\cos\varrho+\sin\varrho\cos r]^2-\sin\delta^2\}\{[\sin r\cos\varrho-\sin\varrho\cos r]^2-\sin^2\delta\}}{\sin^4\varrho\cos^4 r}$$

bringen, weil $\sin(r+\delta+\varrho)\sin(r-\delta+\varrho)=\sin^2(r+\varrho)-\sin^2\delta$ und $\sin(r+\delta-\varrho)\sin(r-\delta-\varrho)=\sin^2(r-\varrho)-\sin^2\delta$ ist. Daraus kann man folgende Schlussfolgerung ziehen:

F. Die Relation zwischen r, ϱ und δ für ein sphärisches Vieleck von bestimmter Seitenzahl lässt sich aus der für ein ebenes Vieleck derselben Seitenzahl dadurch ableiten, dass man $\sin\delta$ statt δ, $\sin r\cos\varrho$ statt r und $\sin\varrho\cos r$ statt ϱ setzt.*

Dieser Satz ist für die Herleitung der auf sphärische Vielecke bezüglichen Relationen von grosser Wichtigkeit, weil es in vielen Fällen leichter ist, die Relationen für ebene Vielecke zu finden, wofür weiter unten Beispiele vorkommen werden.

Es bleibt uns nur noch übrig, für einige der einfachsten Fälle diese Relationen wirklich zu entwickeln, und zwar wollen wir mit Vielecken gerader Seitenzahl den Anfang machen, weil sich für diese die Ausführung der Rechnung am leichtesten gestaltet.

1. Für ein Viereck hat man nach 9) die zwei Gleichungen: $b=t_2{}^2$ und $at_2{}^2=1$, woraus sofort:

$$ab-1=0$$

oder

$$\sin(r+\delta+\varrho)\sin(r+\delta-\varrho)\sin(r-\delta+\varrho)\sin(r-\delta-\varrho)=\sin^4\varrho\cos^4 r\ **$$

als verlangte Relation folgt. Für die Ebene geht dieselbe über in:

$$(r+\delta+\varrho)(r+\delta-\varrho)(r-\delta+\varrho)(r-\delta-\varrho)=\varrho^4$$

oder

$$(r^2-\varrho^2)^2-2\delta(r^2+\varrho^2)+\delta^4=\varrho^4.$$

Dies giebt:

$$\delta^2=r^2+\varrho^2\pm\varrho\sqrt{4r^2+\varrho^2},$$

wo das obere Zeichen für den Fall gilt, dass der Kreis ϱ ausserhalb des Kreises r liegt, das untere für den Fall, dass der Kreis r den Kreis ϱ

---

* In etwas anderer Form findet sich dieser Satz, durch Vergleichung der Werthe der Invarianten Δ, Δ', Θ und Θ' für die Ebene und die Kugel abgeleitet, bei Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie des Raumes I², S. 316.

** Genau in derselben Gestalt, aber ohne Beweis giebt Steiner diese Relation Gesammelte Werke I, 159, wo er auch die Relationen für das ebene Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs- und Achteck mittheilt.

einschliesst. Umgekehrt leitet man daraus durch Anwendung des Satzes F für das sphärische Viereck folgende Form der Relation her:

$$sin^2 \delta = sin^2 r \, cos^2 \varrho + sin^2 \varrho \, cos^2 r \pm sin \, \varrho \, cos \, r \sqrt{4 \, sin^2 r \, cos^2 \varrho + sin^2 \varrho \, cos^2 r}.$$

2. Für ein Sechseck gelten die drei Gleichungen:

$$b = t_2^2, \quad a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \quad a t_3^2 = 1,$$

woraus nach leichter Rechnung die Relation $(ab-1)^2 = c^2 ab$ folgt, d. h.:

$$[sin(r+\delta+\varrho) \, sin(r+\delta-\varrho) \, sin(\varrho-\delta+\varrho) \, sin(r-\delta-\varrho) - sin^4 \varrho \, cos^4 r]^2$$
$$= 4(sin^2 r \, cos^2 \varrho - sin^2 \delta)^2 \, sin(r+\delta+\varrho) \, sin(r+\delta-\varrho) \, sin(r-\delta+\varrho) \, sin(r-\delta-\varrho).$$

3. Für ein Achteck erhält man aus den vier Gleichungen:

$$b = t_2^2, \;\; a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \;\; a t_3^2 t_4^2 + b + c t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2, \;\; a t_4^2 = 1$$

ebenso leicht die Relation:

$$(ab-1)^4 = c^4 ab.$$

4. Was das Zehneck betrifft, so könnte es scheinen, dass die Relation für dasselbe $(ab-1)^6 = c^6 ab$ heissen müsse, weil man für das Viereck $(ab-1)^0 = c^0 ab$, für das Sechseck $(ab-1)^2 = c^2 ab$, für das Achteck $(ab-1)^4 = c^4 ab$ hat; aber dieser Analogieschluss ist falsch, wie aus der folgenden Darstellung hervorgeht. Von den fünf Gleichungen:

$$b = t_2^2, \quad a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2,$$
$$a t_3^2 t_4^2 + b + c t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2,$$
$$a t_4^2 t_5^2 + b + c t_4 t_5 = t_4^2 + t_5^2, \quad a t_5^2 = 1$$

giebt nämlich zunächst die zweite und vierte mit Hilfe der ersten und fünften:

$$(ab-1) t_3 + c\sqrt{b} = 0 \;\text{ und }\; c\sqrt{a}\, t_4 + ab - 1 = 0.$$

Durch Substitution der daraus gewonnenen Werthe von t_3 und t_4 in die dritte Gleichung erhält man:

$$2\, abc^2 (ab-1)^2 + c^3 (ab-1)^2 \sqrt{ab} = abc^4 + (ab-1)^4$$

oder anders geordnet:

$$c^3 (ab-1)^2 \sqrt{ab} = [(ab-1)^2 - c^2 ab]^2 - c^4 ab(ab-1).$$

Durch Quadriren geht diese Gleichung über in:

$$c^6 (ab-1)^4 ab = [(ab-1)^2 - c^2 ab]^4 - 2 c^4 ab(ab-1)[(ab-1)^2 - c^2 ab]^2$$
$$+ c^8 a^2 b^2 (ab-1)^2$$

oder, wenn man das Glied links auf die rechte Seite bringt:

$$0 = [(ab-1)^2 - c^2 ab] \{[(ab-1)^2 - c^2 ab]^3 - 2 c^4 ab(ab-1)[(ab-1)^2 - c^2 ab]$$
$$- c^6 ab(ab-1)^2\}.$$

Wie man sieht, lässt sich der Factor $(ab-1)^2 - c^2 ab$, welcher dem Zehneck fremd ist, weil er, gleich Null gesetzt, die Relation für das Sechseck liefert, ausscheiden, und die Relation für das Zehneck nimmt demnach die Gestalt an:

$$[(ab-1)^2 - c^2 ab]^3 = 2 c^4 ab(ab-1)[(ab-1)^2 - c^2 ab] + c^6 ab(ab-1)^2.$$

Indem man die linke Seite in die zwei Posten $(ab-1)^2[(ab-1)^2-c^2ab]^2$ $-c^2ab[(ab-1)^2-c^2ab]^2$ zerlegt und den zweiten auf die rechte Seite bringt, erhält diese Gleichung die bequemere Form:

$$(ab-1)^2[(ab-1)^2-c^2ab]^2=c^2ab[(ab-1)^2-c^2]^2,$$

wodurch durch Radicirung die zwei Relationen:

$$(ab-1)[(ab-1)^2-c^2ab]=\pm c[(ab-1)^2-c^2]\sqrt{ab}$$

entspringen, von denen die erste für den Fall gilt, dass der Kreis r den Kreis ϱ einschliesst, die zweite, mit dem negativen Zeichen rechts, für den Fall, dass die Kreise r und ϱ auseinanderliegen.

5. Endlich wollen wir noch die Relation für ein Zwölfeck entwickeln. Aus der ersten und zweiten, vorletzten und letzten der hierzu dienenden Gleichungen erhält man wieder wie oben:

$$(ab-1)t_3+c\sqrt{b}=0 \quad \text{und} \quad c\sqrt{a}\,t_5+ab-1=0,$$

wodurch die beiden mittelsten Gleichungen übergehen in:

$$[(ab-1)^2-c^2ab]\,t_4^2+c^2\sqrt{b}\,(ab-1)\,t_4+b[c^2-(ab-1)^2]=0,$$
$$a[c^2-(ab-1)^2]\,t_4^2+c^2\sqrt{a}\,(ab-1)\,t_4+[(ab-1)^2-c^2ab]=0.$$

Als Resultante dieser beiden Gleichungen findet man nach den bekannten Methoden:

$$(ab-1)^2[(ab-1)^2-c^2\sqrt{ab}]\{[(ab-1)^2+c^2\sqrt{ab}]^2-c^4(1+\sqrt{ab})^2\sqrt{ab}\}=0.$$

Die beiden ersten quadratischen Factoren sind dem Zwölfeck fremd, denn sie gelten für das Viereck und Achteck. Es bleiben somit als Relationen für das Zwölfeck, wenn man entwickelt und neu ordnet:

$$(ab-1)^4-c^4ab=\pm c^2[c^2(ab+1)-2(ab-1)^2]\sqrt{ab},$$

von denen die erste, mit dem positiven Zeichen, wiederum für den Fall gilt, dass der Kreis r den Kreis ϱ einschliesst, die zweite für den Fall, dass beide Kreise auseinanderliegen.

Die Relationen für Vielecke ungerader Seitenzahl folgen ebenso leicht aus den Gleichungen 10), und zwar hat man

1. für das Dreieck $b=t_2^2$ und $at_2^4+b-ct_2^2=2t_2^2$. Daraus findet man sofort nach Ausscheidung des Factors b:

$$ab-1=c,$$

d. h.

$$\sin(r+\delta+\varrho)\sin(r+\delta-\varrho)\sin(r-\delta+\varrho)\sin(r-\delta-\varrho)$$
$$=\sin^2\varrho\cos^2 r[\sin^2\varrho\cos^2 r+2\sin^2 r\cos^2\varrho-2\sin^2\delta].$$

Für die Ebene geht diese Relation über in:

$$(r^2-\varrho^2)^2-2\delta^2(r^2+\varrho^2)+\delta^4=\varrho^4+2\varrho^2(r^2-\delta^2)$$

oder

$$\delta^4-2r^2\delta^2+r^4-4r^2\varrho^2=0.$$

Dies giebt aber die bekannte Euler'sche Relation $\delta^2=r^2\pm 2r\varrho$, folglich nach Satz F für das sphärische Dreieck:

$$\sin^2\delta = \sin r \cos\varrho (\sin r \cos\varrho \pm 2 \sin\varrho \cos r)^*$$

oder in anderer Form:

$$\sin^2\varrho \cos^2 r = \sin(r \pm \varrho + \delta) \sin(r \pm \varrho - \delta).$$

2. Das Fünfeck erfordert die Gleichungen:

$$b = t_2^2, \quad a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \quad a t_3^4 + b - c t_3^2 = 2 t_3^2.$$

Die erste und zweite Gleichung geben $(ab-1)t_3 + c\sqrt{b} = 0$, wodurch die dritte Gleichung nach Ausscheidung des Factors b übergeht in:

$$abc^4 + (ab-1)^4 = c^2(c+2)(ab-1)^2.$$

Wenn man derselben die Form giebt:

$$[(ab-1)^2 - c^2]^2 = c^3(ab-1)[ab-1-c],$$

so kann man den Factor $ab-1-c$, welcher dem Dreieck angehört, hier also fremd ist, ausscheiden und erhält so endlich

$$[ab-1+c]^2[ab-1-c] = c^3(ab-1).$$

Für das ebene Fünfeck kann man sich mit Vortheil der folgenden Reduction bedienen. Man setze $(r+\delta):\varrho = \alpha$, $(r-\delta):\varrho = \beta$, so ist $a = \alpha^2 - 1$, $b = \beta^2 - 1$, $c = 2\alpha\beta$, $ab - 1 = \alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2$, was wir kurzweg mit A bezeichnen wollen. Die Gleichung $(ab-1)^4 - c^2(c+2)(ab-1)^2 + abc^4 = 0$ geht dann über in $A^4 - 8\alpha^2\beta^2(\alpha\beta+1)A^2 + 16\alpha^4\beta^4(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$. Dies giebt aber $A^2 = 4\alpha^2\beta^2[\alpha\beta + 1 \pm (\alpha+\beta)$, also entweder

$$(\alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = 4\alpha^2\beta^2(\alpha+1)(\beta+1)$$

oder

$$(\alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = 4\alpha^2\beta^2(\alpha-1)(\beta-1).$$

Die erste dieser Gleichungen ist durch $\alpha\beta + \alpha + \beta$ theilbar, die zweite durch $\alpha\beta - \alpha - \beta$; durch Ausführung der Divisionen bekommt man für das ebene Fünfeck die zwei Relationen:

$$\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^3\beta^3 = \alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha+1)(\beta+1),$$
$$\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^3\beta^3 = \alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-1)(\beta-1),^{**}$$

von denen die erste gilt, wenn die Kreise r und ϱ sich schneiden, die zweite, wenn der Kreis ϱ vom Kreise r eingeschlossen wird. Nach Wiedereinführung der Werthe von α und β und durch Anwendung des Satzes F erhalten die Relationen ihre Ausdehnung auf die Kugel.

3. Der Einfachheit halber wollen wir gleich von vornherein das ebene Siebeneck betrachten und dabei die nämlichen Bezeichnungen beibehalten, wie in der vorigen Nummer. Man hat auszugehen von den Gleichungen:

---

* In etwas anderer Form steht diese Relation bei Salmon-Fiedler a. a. O. S. 316.

** Vergl. damit die Form dieser Relation bei Durège a. a. O. S. 186; durch Rationalisiren und Ausscheidung des fremden Factors $r + \delta + \varrho$ kann man derselben die obige symmetrische Gestalt geben:

$$b = t_2^2, \quad a t_2^2 t_3^2 + b + c t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2, \quad a t_3^2 t_4^2 + b + c t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2,$$
$$a t_4^4 + b - c t_4^2 = 2 t_4^2.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung ergiebt sich $A t_3 = -2\alpha\beta\sqrt{\beta^2-1}$, aus der letzten Gleichung aber erhält man entweder $(\alpha-1)t_4^2 = \beta+1$ oder $(\alpha+1)t_4^2 = \beta-1$. Nehmen wir zunächst den ersten Werth, so wird die dritte Gleichung, nachdem man die Nenner weggebracht und mit dem fremden Factor $\beta+1$ dividirt hat:

$$4(\alpha^2-1)(\beta^2-1)\alpha^2\beta^2 + (\alpha-1)(\beta-1)A^2 - 4\alpha^2\beta^2 A\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$= 4\alpha^2\beta^2(\alpha-1)(\beta-1) + A^2$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $(\alpha^2-1)(\beta^2-1) = 1 - A$ ist:

$$4\alpha^2\beta^2(1-A) + (\alpha\beta-\alpha-\beta)A^2 - 4\alpha^2\beta^2(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)$$
$$= 4\alpha^2\beta^2 A\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)}.$$

Dies giebt nach der Reduction:

$$(A^2 - 4\alpha^2\beta^2)(\alpha\beta-\alpha-\beta) - 4\alpha^2\beta^2 A = 4\alpha^2\beta^2 A\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)}.$$

Erhebt man jetzt ins Quadrat, so fällt rechts und links das Glied $16\alpha^4\beta^4 A^2$ fort, und nach Weghebung des fremden Factors $\alpha\beta-\alpha-\beta$ bleibt nur noch:

$$(A^2 - 4\alpha^2\beta^2)^2(\alpha\beta-\alpha-\beta) - 8\alpha^2\beta^2 A(A^2 - 4\alpha^2\beta^2) = 16\alpha^4\beta^4 A^2$$

oder in einer mehr symmetrischen Form

$$(A^2 - 4\alpha^2\beta^2)^2(\alpha-1)(\beta-1) = (4\alpha^2\beta^2 A^2 + A^2 - 4\alpha^2\beta^2)^2.$$

Diese Entwickelung gilt für den Fall, dass der Kreis r den Kreis ϱ einschliesst. Hätte man aber den andern Werth von t_4 aus $(\alpha+1)t_4^2 = \beta-1$ genommen und gerade so gerechnet, so hätte man als Relation für den Fall, dass beide Kreise sich schneiden, erhalten:

$$(A^2 - 4\alpha^2\beta^2)^2(\alpha+1)(\beta+1) = (4\alpha^2\beta^2 A^2 + A^2 - 4\alpha^2\beta^2)^2.$$

Dabei wären die Factoren $\beta-1$ und $\alpha\beta+\alpha+\beta$ weggefallen; das Product des bei der ersten Relation ausgeschiedenen Factors $\alpha\beta-\alpha-\beta$ mit $\alpha\beta+\alpha+\beta$ giebt aber $\alpha^2\beta^2-(\alpha+\beta)^2$, was annullirt die Relation für das Dreieck ist, ein Beweis, dass wir das Recht hatten, diese beiden Factoren wegzuwerfen.